Prva domača naloga pri predmetu Proseminar B (2014)

Rešitve nalog oddajte do **petka, 30. 5. 2014** v elektronski obliki na spletni učilnici. Datoteka naj bo tipa pdf, lahko je tudi skeniran rokopis.

1. Dokažite, da obstaja neskončno mnogo praštevil oblike $4k+3$, $k \in \mathbb{N}$.

2. Praštevilo p je *Germainino praštevilo*, če je tudi $2p+1$ praštevilo. Primeri prvih nekaj Germaininih praštevil so 2, 3, 5, 11, 23,...

   a) Preverite, da za vsako Germainino praštevilo $p > 3$ velja
   $$p \equiv 5 \pmod{6}.$$

   b) Uredimo Germainina praštevila po velikosti in jih označimo s q_k, $k = 1, 2, \ldots$ Torej je $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = 5$, $q_4 = 11, \ldots$ S pomočjo računalnika poiščite q_{2014}. Opišite postopek iskanja.

3. Naj bo n naravno število. Dokažite, da je $n+6$ praštevilo natanko tedaj, ko je
   $$720(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{(n+6)}.$$

4. Naj bodo števila n, $n+2$ in $n+6$ praštevilski trojček. Dokažite, da je tedaj
   $$\begin{aligned}&4320\,(4((n-1)!+1)+n)\\ &+361\,n(n+2) \equiv 0 \pmod{(n(n+2)(n+6))}.\end{aligned}$$

   Ali velja tudi obrat trditve? Če ne velja, poiščite protiprimer in poskusite ugotoviti, za katere n velja tudi obrat trditve.

5. Označimo s $\pi(x)$ število praštevil, ki so manjša ali enaka x. Predpostavimo, da je
   $$\pi(x) \approx \left(\frac{x}{\log x}\right)^p, \quad p \in \mathbb{R}, \quad x \to \infty.$$

   Potem je
   $$p\,(\log x - \log\log x) \approx \log \pi(x).$$

Definirajmo funkcijo

$$F(p;x) = p\left(\log x - \log\log x\right)$$

in poskusimo oceniti eksponent p tako, da izberemo x_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ ter minimiziramo napako

$$E(p) = \sum_{i=1}^{N} \left(F(p;x_i) - \log \pi(x_i)\right)^2.$$

Iščemo torej

$$\min_{p \in \mathbb{R}} E(p).$$

Z zgornjo metodo ocenite p, če je $x_i = 2^{i+15}$, $i = 1, 2, \ldots, 10$.

Uspešno reševanje vam želim!

Emil Žagar