

Domača naloga pri predmetu Proseminar B (drugi del)

Rešitve nalog oddajte do **srede, 27.6.2012** v elektronski obliki na naslov emil.zagar@fmf.uni-lj.si, ali pa v pisni obliki v moj predalček ali meni osebno.

1. Naj bo A celotno polje in \mathcal{S} množica zaporedij s končnim nosilcem, torej

$$\mathcal{S} = \{(a_0, a_1, a_2, \dots); a_i \in A, i = 0, 1, \dots\},$$

kjer je samo končno mnogo elementov a_i različnih od 0 (z 0 bomo označevali tako nevtralni element za seštevanje v A , kot tudi 0 kot naravno število). Obstaja torej $n \in \mathbb{N}$ (k naravnim številom štejemo tudi 0), da je $a_j = 0$ za vsak $j \geq n$. Množico \mathcal{S} opremimo z operacijama seštevanja $+$ in množenja \cdot v skladu z naslednjo definicijo.

DEFINICIJA 1 Za $P = (a_0, a_1, \dots)$ in $Q = (b_0, b_1, \dots)$ iz \mathcal{S} naj bo

$$P + Q = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots),$$

$$P \cdot Q = (a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, \dots, a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \dots + a_i b_0, \dots),$$

kjer sta seštevanje in množenje na desni strani definirana v kolobarju A . Dokažite, da je $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ kolobar.

2. Naj bo $X = (0, 1, 0, \dots) \in \mathcal{S}$. Dokažite, da v kolobarju $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ velja:

- $X^n = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n\text{-krat}}, 1, 0, \dots), n \in \mathbb{N}$.

- Naj bo $a \in A$. V kolobarju $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ element a enačimo z $(a, 0, \dots)$. Dokažite, da je

$$(X + a)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j X^{n-j}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. Naj bo $P \in \mathbb{Q}[X]$ tak polinom, da je $P(X^2 + 1)$ ničelni polinom. Dokažite, da je P ničelni polinom.

4. Ali obstaja polinom stopnje 5 z realnimi koeficienti, ki ima v zaporedju koeficientov pet sprememb predznaka in same realne ničle, od tega natanko tri pozitivne? Če obstaja, ga zapišite, sicer utemeljite, zakaj ne obstaja?

5. Dan je polinom

$$p_n(x) = x^n - \sum_{j=0}^{n-1} x^j, \quad n \geq 2.$$

Označimo z σ_n njegovo najmanjšo pozitivno ničlo. Dokažite, da σ_n vedno obstaja in zanjo velja $1 < \sigma_n < 2$. Nato dokažite enakost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 2.$$