Druga domača naloga pri predmetu Proseminar B (2014)

Rešitve nalog oddajte do **ponedeljka, 30. 6. 2014** v elektronski obliki na spletni učilnici. Datoteka naj bo tipa pdf, lahko je tudi skeniran rokopis. Naloge lahko zagovarjate po dogovoru tudi pred rokom oddaje, lahko pa tudi jeseni, a le do konca jesenskega izpitnega obdobja.

1. Naj bo A celostno polje in $\mathcal{S}$ množica zaporedij s končnim nosilcem, torej
$$\mathcal{S} = \{(a_0, a_1, a_2, \dots);\ a_i \in A,\ i = 0, 1, \dots\},$$
kjer je samo končno mnogo elementov a_i različnih od 0 (z 0 bomo označevali tako nevtralni element za seštevanje v A, kot tudi 0 kot naravno število). Obstaja torej $n \in \mathbb{N}$ (k naravnim številom štejemo tudi 0), da je $a_j = 0$ za vsak $j \geq n$. Množico $\mathcal{S}$ opremimo z operacijama seštevanja $+$ in množenja $\cdot$ v skladu z naslednjo definicijo.

   DEFINICIJA 1 *Za $P = (a_0, a_1, \dots)$ in $Q = (b_0, b_1, \dots)$ iz $\mathcal{S}$ naj bo*
$$\begin{aligned} P + Q &= (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots), \\ P \cdot Q &= (a_0\, b_0, a_0\, b_1 + a_1\, b_0, \dots, a_0\, b_i + a_1\, b_{i-1} + \dots + a_i\, b_0, \dots), \end{aligned}$$
kjer sta seštevanje in množenje na desni strani definirana v kolobarju A. Dokažite, da je $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ kolobar.

2. Naj bo $X = (0, 1, 0, \dots) \in \mathcal{S}$. Dokažite, da v kolobarju $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ velja:
   - $X^n = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-\text{krat}}, 1, 0, \dots)$, $n \in \mathbb{N}$.
   - Naj bo $a \in A$. V kolobarju $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ element a enačimo z $(a, 0, \dots)$. Dokažite, da je
$$(X + a)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j\, X^{n-j}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. Naj bo $P \in \mathbb{Q}[X]$ tak polinom, da je $P(X^2 + 1)$ ničelni polinom. Dokažite, da je P ničelni polinom.

4. Descartesovo pravilo predznakov se da v nekaterih primerih bistveno izboljšati. Velja naslednji izrek.

   IZREK 1 *Naj bo $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ polinom z realnimi koeficienti. Definirajmo koeficiente $A_j := a_0 + a_1 + \cdots + a_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Če je $A_n = 0$, potem je število pozitivnih ničel polinoma p omejeno z $V(A_0, A_1, \ldots, A_n) + 1$, kjer je $V(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ število sprememb predznaka v zaporedju $(A_j)_{j=0}^n$.*

   - Uporabite zgornji izrek in določite natančno število pozitivnih ničel polinoma $p(x) = 2\,x^{12} - x^{10} + x^9 - 2\,x^8 - 2\,x^5 + x^3 - x + 2$.
   - Dokažite, da je vedno $V(A_0, A_1, \ldots, A_n) \leq V(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, v primeru, ko je $A_n = 0$, pa je $V(a_0, a_1, \ldots, a_n) - V(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ liho število.
   - Dokažite zgornji izrek.

5. Dan je polinom

   $$p_n(x) = x^n - \sum_{j=0}^{n-1} x^j, \quad n \geq 2.$$

   Označimo z σ_n njegovo najmanjšo pozitivno ničlo. Dokažite, da σ_n vedno obstaja in zanjo velja $1 < \sigma_n < 2$. Nato dokažite enakost

   $$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = 2.$$

Uspešno reševanje vam želim!

Emil Žagar