

SPLOŠNA TOPOLOGIJA: PISNI IZPIT Z DNE 25. 1. 2010

TEORETIČNA NALOGA

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrataček čitljivo označi, če je trditev pravilna (**P**) oziroma napačna (**N**).

Če ne veš, pusti kvadrataček prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- Preslikava $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je zvezna, če so praslike odprtih množic odprte.
- Če so vse enoelementne množice v topološkem prostoru odprte, so tudi zaprte.
- Naj bo $A \subset \mathbb{R}$ in naj bo $h: A \rightarrow \mathbb{R}$ homeomorfizem. Tedaj je A zaprta množica v \mathbb{R} .
- Separabilen Hausdorffov prostor je 2-števen.
- Zaprtje povezanega podprostora je povezan podprostor.
- Vsaka odprta podmnožica evklidskega prostora \mathbb{R}^n je lokalno s potmi povezana.
- Števena unija kompaktnih podprostorov danega prostora je kompakten podprostor.
- Slika kompaktne množice pri zvezni preslikavi je kompaktna množica.
- Podprostor kompaktne prostora je lokalno kompakten.
- Kompaktifikacija evklidske premice \mathbb{R} z eno točko je homeomorfna intervalu $[0, 1]$.

PROBLEMSKE NALOGE:

1. NALOGA

Podana je družina podmnožic množice $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$:

$$\mathcal{B} = \{(a, b] \times \{0\} \cup [a, b) \times \{1\} \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Družina \mathcal{B} je baza neke topologije na X (tega ne dokazuj). Imenujmo jo τ .

- a. Naj bo $x_0 \in \mathbb{R}$. Poišči homeomorfizem $h: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ z lastnostjo $h(0, 0) = (x_0, 0)$.
- b. Dokaži, da prostor (X, τ) zadošča prvemu aksiomu števnosti.
- c. Ali obstaja homeomorfizem $h: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ z lastnostjo $h(\mathbb{R} \times \{0\}) = (\mathbb{R} \times \{1\})$?
- d. Ali je prostor (X, τ) Hausdorffov?

Rešitve oziroma odgovore utemelji.

2. NALOGA

Podan je podprostor X evklidske ravnine \mathbb{R}^2 :

$$X = \{-1\} \times [0, 1] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [-1, 0] \times \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right) \cup \\ \cup [0, 1] \times \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0, 1] \right).$$

- a. Ali je prostor X povezan?
- b. Ali je prostor X lokalno povezan?
- c. Ali je prostor X kompakten?
- d. Ali je prostor X lokalno kompakten?

Odgovore utemelji.

3. NALOGA

Podan je podprostor X evklidske ravnine \mathbb{R}^2 :

$$X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ t \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n} \right) \mid t \geq 1 \right\} \right).$$

(Pri interpretaciji prostora X si pomagaj s skico na desni.)

Poišči podprostor ravnine \mathbb{R}^2 , ki je homeomorfen kompaktifikaciji prostora X z eno točko.

Rešitev ustrezno utemelji.

