Rešitve prvega izpita iz splošne topologije

27. januar 2012

1. naloga (10 točk)

Teoretična naloga: Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna $\boxed{\text{P}}$ oziroma napačna $\boxed{\text{N}}$. Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

$\boxed{\text{N}}$ Zvezna preslikava $f\colon [0,1] \to (0,1)$ je zaprta natanko tedaj, ko je odprta.

$\boxed{\text{P}}$ Za poljubni množici A in B v topološkem prostoru X velja $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$.

$\boxed{\text{N}}$ Če je S gosta množica v X in je $Y \subset X$, potem je tudi $S \cap Y$ gosta v Y.

$\boxed{\text{P}}$ Topologija končnih komplementov na množici $\mathbb{R}$ zadošča lastnosti T_1.

$\boxed{\text{P}}$ Vsaka preslikava v diskretni prostor je odprta.

$\boxed{\text{P}}$ Komponente za povezanost prostora iracionalnih števil $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ so točke.

$\boxed{\text{N}}$ Presek povezanih prostorov je povezan prostor.

$\boxed{\text{P}}$ Vsak lokalno kompakten Hausdorffov prostor je regularen.

$\boxed{\text{N}}$ Če je preslikava $f\colon X \to Y$ zvezna, je praslika vsake kompaktne množice kompaktna.

$\boxed{\text{P}}$ Odprt podprostor lokalno kompaktnega Hausdorffovega prostora je lokalno kompakten.

2. naloga (20 točk)

Na množici $\mathbb{N}$ uvedemo topologijo τ z naslednjim predpisom:

$$\tau = \Big\{U \subseteq \mathbb{N} \mid U = \emptyset \; ali \; (\exists k \in \mathbb{N} : |U^C \cap [n^2, (n+1)^2]| \le k, \forall n \in \mathbb{N}).$$

(i) Dokaži, da je τ topologija.

(ii) Obravnavaj povezanost, kompaktnost in separacijske lastnosti prostora $(\mathbb{N}, \tau)$.

(iii) Poišči zaprtje množice $A = \{1, 7, 14, 21, \ldots\}$.

Rešitev: Prostor je povezan, ni kompakten in zadošča lastnosti T_1 ter T_0; lastnosti T_2, T_3 in T_4 nima. Skoraj vse to sledi iz ugotovitve, da v prostoru ne obstajata disjunktni odprti množici. Prostor ni kompakten, saj ga lahko izrazimo kot neskončno unijo naraščajočih odprtih množic. Zaprtje A je cel prostor.

3. naloga (20 točk)

Naj bo $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ strogo naraščajoče zaporedje pozitivnih števil in definirajmo

$$X_{\mathbf{a}} = [1,2] \times \{0\} \cup \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, x/a_n) \mid x \in [0, a_n]\} \Big).$$

Obravnavaj povezanost, lokalno povezanost, kompaktnost in lokalno kompaktnost prostora $X_{\mathbf{a}}$.

Rešitev: Naj bo $A = \lim_{n\to\infty} a_n \in (0, \infty]$. Prostor ni nikoli kompakten in nikoli lokalno kompakten. Povezan je natanko tedaj, ko je $A = \infty$. Lokalno povezan pa je natanko tedaj, ko je $A < \infty$.

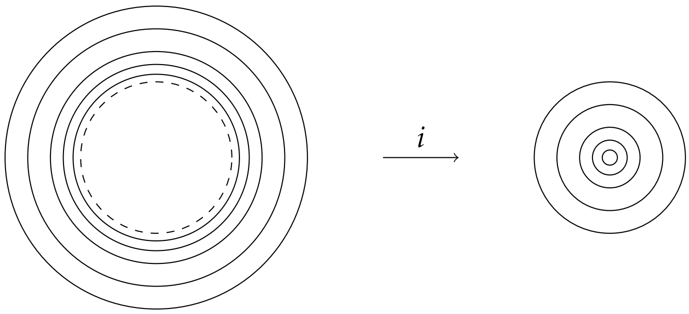
4. naloga (20 točk)

Naj X^+ označuje kompaktifikacijo z eno točko prostora X.

(i) Naj bo $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists n \in \mathbb{N} : x^2 + y^2 = (1 + 1/n)^2\}$. Poišči predstavnika X^+ v ravnini in ga utemelji. (Eksplicitno zapiši preslikavo $i \colon X \to X^+$, itd.)

(ii) Naj bo $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2, |x| \neq 1\}$. Poišči predstavnika X^+. (V tem primeru izčrpno utemeljevanje ni potrebno: zadošča slika in oznaka dodane točke.)

Rešitev: V prvem primeru lahko za preslikavo vzamemo središčni razteg"(v našem primeru je to skrčitev) na prostor $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists n \in \mathbb{N} : x^2 + y^2 = (1/n)^2\}$. Kompaktifikacijo z eno točko dobimo tako, da dodamo točko $(0, 0)$.



V drugem primeru dobimo sledeči prostor: