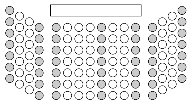
Prvi izpit iz splošne topologije

31. januar 2014

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 70 točk. Vse odgovore je potrebno dobro utemeljiti. Veliko uspeha!



Sedež (2.05)

1	
2	
3	
Σ	

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (10 točk)

Teoretična naloga: Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna $\boxed{\text{P}}$ oziroma napačna $\boxed{\text{N}}$. Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- [ ] Vsaka topologija ima natanko eno bazo.
- [ ] Zvezna preslikava je odprta natanko tedaj, ko je zaprta.
- [ ] Naj velja $X = A \cup B$ ter naj bo $f\colon X \to \mathbb{R}$ preslikava. Če sta $f|_A\colon A \to \mathbb{R}$ in $f|_B\colon B \to \mathbb{R}$ zvezni preslikavi, potem je tudi f zvezna.
- [ ] Če ima produkt $X \times Y$ lastnost T_1, potem jo imata tudi X in Y.
- [ ] Za poljubno podmnožico A topološkega prostora X velja, da je zaprtje njene notranjosti enako A.
- [ ] Zaprtje povezane podmnožice topološkega prostora je povezana podmnožica.
- [ ] Vsak povezan prostor je tudi lokalno povezan.
- [ ] Vsak kompakten prostor je tudi lokalno kompakten.
- [ ] Presek zaprte podmnožice in kompaktne podmnožice Hausdorffovega prostora je kompaktna podmnožica.
- [ ] Če je kompaktifikacija z eno točko prostora X homeomorfna enotski krožnici, potem je X homeomorfen odprtemu intervalu.

2. naloga (20 točk)

Naj bo $\sigma\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ zrcaljenje čez izhodišče ($\sigma(x) = -x$). Na $\mathbb{Z}$ uvedemo topologijo s predpisom:

$$\tau = \{U \mid \sigma(U) = U\} \quad \textit{oz. ekvivalentno} \quad \tau = \{U \mid \forall n \in \mathbb{Z} : n \in U \implies \sigma(n) \in U\}.$$

(i) Dokaži, da je τ topologija.

(ii) Obravnavaj separacijske lastnosti prostora $(\mathbb{Z}, \tau)$.

(iii) Ali je $(\mathbb{Z}, \tau)$ 1−števen, 2−števen, povezan, lokalno povezan?

(iv) Kateremu znanemu prostoru je homeomorfen podprostor $\mathbb{N}$?

3. naloga (20 točk)

Naj bo $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strogo padajoče zaporedje pozitivnih števil z limito b. Definirajmo podprostor ravnine

$$X_{\mathbf{a}} = \Big([-1,1] \times \{0\}\Big) \cup \Big(\{0\} \times [b,\infty)\Big) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big\{(x, a_n x^2 + a_n) \mid x \in [-1,1]\Big\}.$$

Obravnavaj povezanost, lokalno povezanost, kompaktnost in lokalno kompaktnost prostora $X_{\mathbf{a}}$.

Opomba: Množica $\{(x, f(x)) \mid x \in [-1,1]\}$ je graf funkcije $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$.

4. naloga (20 točk)

Podan je podprostor ravnine:

$$X = [-1,1] \times [-1,0) \cup [-1,1] \times (0,1].$$

Naj X^+ označuje kompaktifikacijo z eno točko prostora X. Poišči predstavnika X^+ v ravnini in ga dobro utemelji.