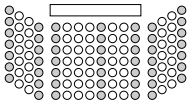
Prvi izpit iz splošne topologije

31. januar 2014

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 70 točk. Vse odgovore je potrebno dobro utemeljiti. Veliko uspeha!



Sedež (2.05)

1	
2	
3	
Σ	

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (10 točk)

Teoretična naloga: Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna [P] oziroma napačna [N]. Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

[N] Vsaka topologija ima natanko eno bazo.

[N] Zvezna preslikava je odprta natanko tedaj, ko je zaprta.

[N] Naj velja $X = A \cup B$ ter naj bo $f\colon X \to \mathbb{R}$ preslikava. Če sta $f|_A\colon A \to \mathbb{R}$ in $f|_B\colon B \to \mathbb{R}$ zvezni preslikavi, potem je tudi f zvezna.

[P] Če ima produkt $X \times Y$ lastnost T_1, potem jo imata tudi X in Y.

[N] Za poljubno podmnožico A topološkega prostora X velja, da je zaprtje njene notranjosti enako A.

[P] Zaprtje povezane podmnožice topološkega prostora je povezana podmnožica.

[N] Vsak povezan prostor je tudi lokalno povezan.

[P] Vsak kompakten prostor je tudi lokalno kompakten.

[P] Presek zaprte podmnožice in kompaktne podmnožice Hausdorffovega prostora je kompaktna podmnožica.

[P] Če je kompaktifikacija z eno točko prostora X homeomorfna enotski krožnici, potem je X homeomorfen odprtemu intervalu.

2. naloga (20 točk)

Naj bo $\sigma\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ zrcaljenje čez izhodišče ($\sigma(x) = -x$). Na $\mathbb{Z}$ uvedemo topologijo s predpisom:

$$\tau = \{U \mid \sigma(U) = U\} \quad \textit{oz. ekvivalentno} \quad \tau = \{U \mid \forall n \in \mathbb{Z} : n \in U \implies \sigma(n) \in U\}.$$

(i) Dokaži, da je τ topologija.

(ii) Obravnavaj separacijske lastnosti prostora $(\mathbb{Z}, \tau)$.

(iii) Ali je $(\mathbb{Z}, \tau)$ 1−števen, 2−števen, povezan, lokalno povezan?

(iv) Kateremu znanemu prostoru je homeomorfen podprostor $\mathbb{N}$?

Rešitev: (ii) Nima lastnosti T_0, T_1, T_1: vsaka okolica 1 vsebuje tudi -1 in obratno. Ima lastnost T_3, T_4: odprte množice so tudi zaprte in obratno, iz tega lastnosti sledita brez večjih težav.

(iii) Je 1−števen (baza $\{\{-n, n\} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$) zato tudi 1−števen. Ni povezan (separacij je npr. $\{0\}$ in vse ostalo). Je lokalno povezan: najmanjše okolice točk ($\{0\}$ ali $\{-n, n\}$) so povezane.

(iv) $\{-n, n\} \cap \mathbb{N} = \{n\}$, dobimo diskretno topologijo.

3. naloga (20 točk)

Naj bo $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strogo padajoče zaporedje pozitivnih števil z limito b. Definirajmo podprostor ravnine

$$X_{\mathbf{a}} = \Big([-1,1]\times\{0\}\Big) \cup \Big(\{0\}\times[b,\infty)\Big) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big\{(x, a_n x^2 + a_n) \mid x \in [-1,1]\Big\}.$$

Obravnavaj povezanost, lokalno povezanost, kompaktnost in lokalno kompaktnost prostora $X_{\mathbf{a}}$.

Opomba: Množica $\{(x, f(x)) \mid x \in [-1,1]\}$ je graf funkcije $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$.

Rešitev: Ni kompakten (neomejen). Lokalno povezan za $b > 0$. Povezan in lokalno kompakten za $b = 0$

4. naloga (20 točk)

Podan je podprostor ravnine:

$$X = [-1,1]\times[-1,0) \cup [-1,1]\times(0,1].$$

Naj X^+ označuje kompaktifikacijo z eno točko prostora X. Poišči predstavnika X^+ v ravnini in ga dobro utemelji.