SPLOŠNA TOPOLOGIJA: PISNI IZPIT
17. 6. 2011

Teoretična naloga (10 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna (**P**) oziroma napačna (**N**).
Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- ☐ Preslikava $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je odprta, če so praslike odprtih množic odprte.
- ☐ Če so vse množice v danem topološkem prostoru odprte, so tudi vse množice zaprte.
- ☐ Števna unija zaprtih intervalov v $\mathbb{R}$ je zaprta množica v $\mathbb{R}$ (v običajni topologiji).
- ☐ 2-števen regularen prostor je normalen.
- ☐ Notranjost povezanega podprostora je povezan podprostor.
- ☐ Vsaka povezana podmnožica evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$ je s potmi povezana.
- ☐ Presek poljubne družine kompaktnih podprostorov danega Hausdorffovega prostora je kompakten podprostor.
- ☐ Slika kompaktne množice pri zvezni preslikavi je kompaktna množica.
- ☐ Lokalna kompaktnost je dedna lastnost.
- ☐ Kompaktifikacija intervala $(0, 1]$ z eno točko je homeomorfna krožnici S^1.

Problemske naloge:

1. naloga (20 točk)

Na množici realnih števil $\mathbb{R}$ je podana metrika

$$d(x, y) = |x - y| + \big|\lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor\big|.$$

Tu je $\lfloor x\rfloor$ (spodnji) celi del števila x.

a. Skiciraj odprto kroglo $K(1, \frac{1}{2})$ in zaprto kroglo $\bar{K}(1, 1)$.
b. Dokaži, da predpis $f(x) = x + 1$ podaja homeomorfizem $(\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d)$.
c. Določi stekališča in limite zaporedja $a_n = -\frac{1}{n}$ v prostoru $(\mathbb{R}, d)$.

Rešitve oziroma odgovore utemelji.

2. naloga (20 točk)

Naj bo $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, 1)$ in naj bo prostor $X_{\mathbf{a}} \subset \mathbb{R}^2$ podan s predpisom:

$$X_{\mathbf{a}} = [0, 1]\times\{0, 1\} \cup \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\tfrac{1}{n}\}\times[0, a_n]\Big).$$

a. Dokaži, da je prostor $X_{\mathbf{a}}$ kompakten natanko tedaj, ko velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
b. Dokaži, da je prostor $X_{\mathbf{a}}$ povezan natanko tedaj, ko je $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$.
c. Določi potreben in zadosten pogoj na zaporedje $\mathbf{a}$, da je $X_{\mathbf{a}}$ lokalno povezan.

Odgovore utemelji.

3. naloga (20 točk)

Naj X^+ označuje kompaktifikacijo prostora X z eno točko.

a. Naj bo $X = \{-1, 1\}\times(0, 1] \cup [-1, 1]\times\{1\} \cup [0, 1)\times\{-1\} \subset \mathbb{R}^2$.
Poišči predstavnika za X^+ v ravnini $\mathbb{R}^2$.
b. Naj bo $Y = [-1, 1]\times(0, 1] \cup [0, 1)\times\{-1\} \subset \mathbb{R}^2$.
Poišči predstavnika za Y^+ v ravnini $\mathbb{R}^2$.

Rešitvi ustrezno utemelji.