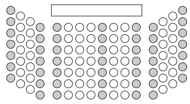
Drugi izpit iz splošne topologije

26. junij 2012

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 70 točk. Vse odgovore je potrebno dobro utemeljiti. Veliko uspeha!



Sedež (2.05)

1	
2	
3	
Σ	

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (10 točk)

Teoretična naloga: Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna $\boxed{\text{P}}$ oziroma napačna $\boxed{\text{N}}$. Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- $\boxed{\text{P}}$ Naj ima topologija τ na prostoru X končno bazo. Tedaj je tudi število zaprtih podmnožic X končno.
- $\boxed{\text{P}}$ Vsak 2−števen prostor je separabilen.
- $\boxed{\text{P}}$ Za vsako surjektivno preslikavo $f\colon X \to Y$ in vse podmnožice $A \subseteq Y$ velja $f(f^{-1}(A)) = A$.
- $\boxed{\text{P}}$ Zaprt podprostor normalnega prostora je normalen.
- $\boxed{\text{P}}$ Če topološki prostor zadošča aksiomoma T_4 in T_1, zadošča tudi aksiomu T_2.
- $\boxed{\text{P}}$ Produkt dveh nepovezanih prostorov ima vsaj štiri komponente.
- $\boxed{\text{N}}$ Topološki prostor je kompakten, če obstaja končno pokritje.
- $\boxed{\text{N}}$ Podprostor kompaktnega Hausdorffovega prostora je lokalno kompakten.
- $\boxed{\text{N}}$ Vsak metričen podprostor v $\mathbb{R}^2$ dopušča kompaktifikacijo z eno točko.
- $\boxed{\text{P}}$ Če sta prostora X in Y kompaktna, potem je tudi $X \times Y$ kompakten.

2. naloga (20 točk)

Na množici realnih števil $\mathbb{R}$ je podana metrika

$$d(x, y) = |x - y| + |U(x, y)|.$$

Pri tem je $U(x, y) = \{n \in \mathbb{Z} \mid (2x < n \leq 2y) \vee (2y < n \leq 2x)\}$, $|U(x, y)|$ pa predstavlja moč množice.

(i) Dokaži, da je d metrika na $\mathbb{R}$ ter poišči $K(0, 1)$, $\overline{K(0, 2)}$ in $\overline{K}(1/4, 1)$.

(ii) Naj X predstavlja prostor realnih števil $\mathbb{R}$, opremljenih z evklidsko metriko. Ali je identična preslikava $(\mathbb{R}, d) \to X$ zvezna? Ali je identična preslikava $(\mathbb{R}, d) \to X$ odprta?

(iii) Ugotovi, za katere parametre $a, b \in \mathbb{R}$ je preslikava $x \mapsto ax + b$ homeomorfizem na $(\mathbb{R}, d)$.

Rešitev: (i) :$K(0, 1) = [0, 1/2)$, $\overline{K(0, 2)} = [-1/2, 1)$ in $\overline{K}(1/4, 1) = [0, 1/2)$.

(ii): Preslikava je zvezna (npr. ker krči razdalje, torej $\varepsilon = \delta$ v definiciji zveznosti), ni pa odprta saj odprto $K(0, 1)$ slika v $[0, 1/2)$ po (i).

(iii): Preslikava mora ohranjati točke $1/2 \cdot \mathbb{Z}$ in mora biti naraščujoča (majhne bazne okolice v točkah $x \in 1/2 \cdot \mathbb{Z}$ so oblike $[x, x + \varepsilon)$, v ostalih točkah pa so to odprti intervali), zato velja $a = 1$ in $b \in 1/2 \cdot \mathbb{Z}$.

3. naloga (20 točk)

Naj bo $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ strogo naraščajoče zaporedje pozitivnih števil, $b \in \mathbb{R}$ in definirajmo

$$X_{\mathbf{a},b} = \{0\} \times \mathbb{R} \cup [b, \infty) \times \{0\} \cup \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a_n)^2 + y^2 = a_n^2\} \Big).$$

Obravnavaj povezanost, lokalno povezanost, kompaktnost in lokalno kompaktnost $X_{\mathbf{a},b}$.

Rešitev:

(a) $X_{\mathbf{a},b}$ ni nikoli kompakten;

(b) $X_{\mathbf{a},b}$ je lokalno kompakten natanko tedaj, ko je $\sup\{a_n\} = \infty$;

(c) $X_{\mathbf{a},b}$ je povezan natanko tedaj, ko je $2\sup\{a_n\} \geq b$;

(d) $X_{\mathbf{a},b}$ je lokalno povezan natanko tedaj, ko je $b \neq 2\sup\{a_n\} < \infty$.

4. naloga (20 točk)

Naj X^+ označuje kompaktifikacijo z eno točko prostora X.

(i) Naj bo $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < 1\}$. Poišči predstavnika X^+ v ravnini in ga utemelji. (Eksplicitno zapiši preslikavo $i\colon X \to X^+$, itd.)

(ii) Naj bo $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2, x^2 + y^2 \neq 1\}$. Poišči predstavnika Y^+. (V tem primeru izčrpno utemeljevanje ni potrebno: zadošča slika in oznaka dodane točke.)

Rešitev: (i) Eden izmed opisov kompaktifikacije je zaprt trikotnik $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq 1\}$. Preslikavo in njen inverz smo naredili na vajah.

(ii) Eden izmed opisov kompaktifikacije je zaprt dvodimenzionalen disk, ki se v središču stika z dvodimenzionalno sfero.