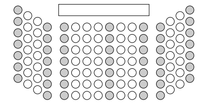
Tretji izpit iz splošne topologije

7. september 2012

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 70 točk. Vse odgovore je potrebno dobro utemeljiti. Veliko uspeha!


Sedež (2.05)

1	
2	
3	
Σ	

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (10 točk)

Teoretična naloga: Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna $\boxed{\text{P}}$ oziroma napačna $\boxed{\text{N}}$. Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- ☐ Za poljubni množici A in B v topološkem prostoru X velja $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- ☐ Vsaka topologija na števnem prostoru lahko vsebuje le števno mnogo elementov.
- ☐ Produkt regularnih prostorov je regularen.
- ☐ Vsaka preslikava v diskretni prostor je zvezna.
- ☐ Komponente vsakega lokalno povezanega prostora so odprte.
- ☐ Zaprtje s potmi povezanega prostora je s potmi povezan prostor.
- ☐ Če je topologija τ_1 močnejša od topologije τ_2 na množici X in je (X, τ_1) kompakten, potem je tudi (X, τ_2) kompakten.
- ☐ Povezan podprostor povezanega normalnega prostora je lokalno povezan.
- ☐ V kompaktnem prostoru ima vsaka neskončna podmnožica stekališče.
- ☐ Kompaktifikacija z eno točko je povezan prostor.

2. naloga (20 točk)

Za poljubni pozitivni realni števili $\alpha < \beta$ definiramo

$$U_{\alpha,\beta} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0, 0\} \mid \alpha < \max\{|x|, |y|\} < \beta\Big\}.$$

(i) Dokaži, da je družina $\mathcal{B} = \{U_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta}$ baza neke topologije na $\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$. Imenujno jo τ.

(ii) Določi notranjost in zaprtje podmnožice $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ v $(\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}, \tau)$.

(iii) Ali je $(\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}, \tau)$ Hausdorffov, in ali zadošča prvemu aksiomu števnosti?

(iv) Ali je kateri izmed naslednjih podprostorov $(\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}, \tau)$ homeomorfen odprtemu intervalu: $(0, \infty) \times \{0\}$ ter $(0, \infty) \times \{1\}$?

3. naloga (20 točk)

Naj bo $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ strogo padajoče zaporedje pozitivnih števil, $b > 0$ in definirajmo

$$X_{\mathbf{a},b} = \{0\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0\} \cup \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(x, a_n x + a_n) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, b]\}\Big).$$

Obravnavaj povezanost, lokalno povezanost, kompaktnost in lokalno kompaktnost $X_{\mathbf{a},b}$.

4. naloga (20 točk)

Naj X^+ označuje kompaktifikacijo z eno točko prostora X.

(i) Naj bo $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = n\}$. Poišči predstavnika X^+ v ravnini in ga utemelji. (Eksplicitno zapiši preslikavo $i\colon X \to X^+$, itd.)

(ii) Naj bo $Y = \{(x, y) \mid xy \neq 0\}$. Poišči predstavnika Y^+. (V tem primeru izčrpno utemeljevanje ni potrebno: zadošča slika in oznaka dodane točke.)