SPLOŠNA TOPOLOGIJA, TEST Z DNE 21.11.2008, REŠITEV

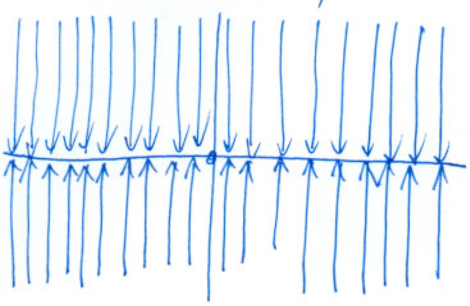
TEORETIČNA NALOGA

Pravilne so trditve:
- Množica S je gosta v topološkem prostoru X, če velja $\overline{S} = X$.
- Baza topologije je vedno pokritje danega topološkega prostora.
- Naj bo $a \in A$. Če a ni notranja točka za A, potem je robna za A.
- Vsak 2-števen prostor je avtomatično separabilen.

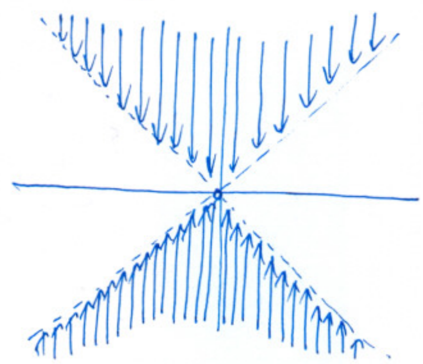
Ostale trditve so napačne.

1. PROBLEM

$X = \big(\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})\big) \cup \{(0,0)\}$



Y :



① Definirajmo $f: X \to Y$ s predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} (x, y+|x|), & y \geq 0 \\ (x, y-|x|), & y \leq 0 \end{cases}$$

Lahko bi tudi zapisali $f(x,y) = (x, \operatorname{sign}(y) \cdot (|y|+|x|))$, iz česar sledi $f(x,y) \in Y$ (če $(x,y) \in X$).

② Dalje definiramo $g: X \to Y$ s predpisom

$$g(x,y) = \begin{cases} (x, y-|x|), & y \geq 0 \\ (x, y+|x|), & y \leq 0 \end{cases}$$

oziroma $g(x,y) = (x, \operatorname{sign}(y) \cdot (|y|-|x|))$ iz česar sledi $g(x,y) \in X$, če vzamemo $(x,y) \in Y$ ($\Leftrightarrow |y| > |x|$ ali $(x,y) = (0,0)$)

③ Ker velja $g \circ f = id_X$ in $f \circ g = id_Y$, sta f in g med seboj inverzni bijekciji.

④ Za $(x_0, y_0) \in X$ in $y_0 \neq 0$ je f zvezna pri (x_0, y_0), ker obstaja $r > 0$ (npr. $r = |y_0|$), da je $f|_{K((x_0,y_0),r) \cap X}$ elementarna.

Utemeljimo zveznost v točki $(0,0)$:

$$d(f(x,y), f(0,0)) = d\big((x, \operatorname{sign}(y) \cdot (|y|+|x|)), (0,0)\big) = \sqrt{|x|^2 + (|y|+|x|)^2} \leq 2 \cdot (|x|+|y|) \leq 4 \cdot \sqrt{x^2+y^2}$$

⑤ Zveznost funkcije g v točkah (x_0, y_0), $y_0 \neq 0$, utemeljimo enako kot za f. Za zveznost v $(0,0)$ ocenimo

$$d(g(x,y), g(0,0)) = \sqrt{|x|^2 + (|y|-|x|)^2} \leq \sqrt{|x|^2 + (|y|+|x|)^2} \leq \ldots \text{ (glej ④) } \leq 4\sqrt{x^2+y^2} = 4 \cdot d((x,y),(0,0)).$$

2. PROBLEM

a. (i) pokritje: vz. $x \in \mathbb{R}$. Tedaj $x \in [\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1] \in \mathcal{B}$. ($\lfloor x \rfloor$ je celi del.)

(ii) Vz. $m, n \in \mathbb{Z}$ in privzemimo $m \leq n$. Tedaj je $[m,m+1] \cap [n,n+1]$ enaka $[m,m+1] \in \mathcal{B}$, če $m = n$, oziroma $\{m+1\} \in \mathcal{B}$, če $m+1 = n$ oziroma $\emptyset$, če $m+1 < n$.
Ravno tako $[m,m+1] \cap \{n\} = \{n\}$, če $n \in \{m, m+1\}$, oziroma $\emptyset$, če $m+1 < n$.
Ravno tako $\{m\} \cap \{n\} = \{m\}$, če $m = n$, oziroma $\emptyset$, če $m < n$. Presek dveh množic iz $\mathcal{B}$ je tako bodisi spet element množice $\mathcal{B}$ ali pa je prazna množica.

b. $\operatorname{Int}(-1,2) = \bigcup_{U \text{ odprta} \subset (-1,2)} U = \bigcup_{U \subset (-1,2),\, U \in \mathcal{B}} U = [0,1]$. Ker je $(-1,2)^C = (-\infty,-1] \cup [2,\infty)$ $= \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}, n < -1} [n,n+1]\Big) \cup \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}, n \geq 2} [n,n+1]\Big)$: odprta množica, je $\overline{(-1,2)} = (-1,2)$: zaprta mn.

c.
- Naj bo $x \in (0,1)$. Vsaka okolica za x vsebuje $[0,1]$ in s tem VSE člene zaporedja. Torej je x limita.
- Naj bo $x \notin (0,1)$ in $U := (-\infty,0] \cup [1,\infty)$. Tedaj je U odprta ok. za x, ki vsebuje EN člen zaporedja. Torej x ni stekališče.

d. Baza $\mathcal{B}$ je unija dveh števnih množic, torej števna. Prostor je zato 2-števen in posledično tudi 1-števen in separabilen.

e. Iz c. sledi, da imamo v $(\mathbb{R}, \tau)$ zaporedje z več limitami. Torej $(\mathbb{R}, \tau)$ ni Hausdorffov.