Rešitve prvega testa iz splošne topologije

11. november 2011

1. naloga

Teoretična naloga: Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna $\boxed{\text{P}}$ oziroma napačna $\boxed{\text{N}}$. Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

$\boxed{\text{P}}$ Notranjost množice A je največja odprta podmnožica A.

$\boxed{\text{N}}$ Za vsako zvezno preslikavo $f\colon X \to Y$ in vsako podmnožico $A \subseteq X$ velja $f^{-1}(f(A)) = A$.

$\boxed{\text{N}}$ Za poljubni množici A in B v topološkem prostoru X velja $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

$\boxed{\text{N}}$ Zvezna surjektivna preslikava $f\colon X \to Y$ je zaprta natanko tedaj, ko je odprta.

$\boxed{\text{P}}$ Če je τ družina podmnožic X, ki vsebuje množici $\emptyset$ in X ter je zaprta za preseke in unije poljubne poddružine τ, potem je τ topologija na množici X.

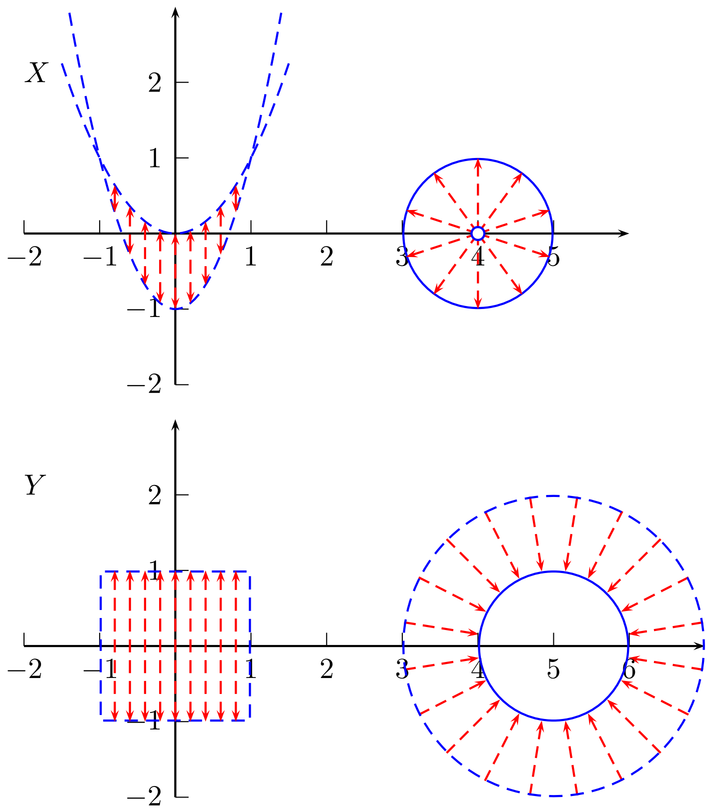
$\boxed{\text{P}}$ Če sta zožitvi $f|_{[0,1]}$ in $f|_{[-1,0]}$ preslikave $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ zvezni, potem je tudi f zvezna.

$\boxed{\text{N}}$ Znaka \$ in Φ sta homeomorfna.

$\boxed{\text{N}}$ V topološkem prostoru je vsaka množica bodisi odprta bodisi zaprta.

$\boxed{\text{P}}$ Topologija τ_1 je močnejša od topologije τ_2 na množici X, natanko tedaj, ko je identična preslikava $id\colon (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ odprta.

$\boxed{\text{P}}$ Naj bosta τ_1 in τ_2 topologiji na množici X. Tedaj tudi $\tau_1 \cap \tau_2$ topologija na množici X.



Prostora naloge 2.

2. naloga

Podana sta podprostora v ravnini $\mathbb{R}^2$.

$$X = \big\{(x, y) \mid 0 < d((x, y), (4, 0)) \leq 1\big\} \cup \big\{(x, y) \mid x^2 > y > 2x^2 - 1\big\}$$

$$Y = \big\{(x, y) \mid 1 \leq d((x, y), (5, 0)) < 2\big\} \cup \big\{(x, y) \mid |x| < 1 \wedge |y| < 1\big\}$$

Dokaži, da sta prostora homeomorfna.

Rešitev: Prostora sta sestavljena iz dveh delov. Homeomorfnost bomo definirali na vsakem delu posebej:

$$X_1 = \big\{(x, y) \mid 0 < d((x, y), (4, 0)) \leq 1\big\} \qquad X_2 = \big\{(x, y) \mid x^2 > y > 2x^2 - 1\big\}$$

$$Y_1 = \big\{(x, y) \mid 1 \leq d((x, y), (5, 0)) < 2\big\} \qquad Y_2 = \big\{(x, y) \mid |x| < 1 \wedge |y| < 1\big\}$$

Homeomorfnost X_1 in Y_1:

- Translacija $f_1\colon X_1 \to A_1 = \{(x, y) \mid 0 < d((x, y), (0, 0)) \leq 1\}$ definirana kot $(x, y) \mapsto (x - 4, y)$ je homeomorfizem (npr., je zvezna z zveznim inverzom);
- "Modificiran sredščni razteg (pri katerem obrnemo smer)" $f_2\colon A_1 \to A_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq d((x, y), (0, 0)) \leq 2\}$ definirana kot

$$(x, y) \mapsto \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (2 - \sqrt{x^2 + y^2})$$

  je po istem argumentu (ki ga je v takih primerih treba na testu zapisati!!) homeomorfizem. (Pozor na dobro definiranost.)
- Očitna translacija $f_3\colon A_2 \to Y_1$ je spet homeomorfizem.

Ker je homeomorfnost ekvivalenčna relacija sledi, da je X_1 homeomorfen Y_1.
Homeomorfnost X_2 in Y_2:

- $g_1\colon Y_2 \to B_1 = \{(x, y) \mid x^2 - (2x^2 - 1) > y > 0\}$ definirana kot $(x, y) \mapsto (x, y - (2x^2 - 1))$ je homeomorfizem (npr., je zvezna z zveznim inverzom);
- $g_2\colon B_1 \to B_2 = \{(x, y) \mid |x < 1| \wedge y \in (0, 1)\}$ definirana kot $(x, y) \mapsto (x, y/(x^2 - (2x^2 - 1)))$ je homeomorfizem.
- $g_3\colon B_2 \to Y_2$ definirana kot $(x, y) \mapsto (x, 2y - 1)$ je homeomorfizem.

3. naloga

Podana je družina podmnožic množice $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{B} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A^C \text{ je števna ali } A = \emptyset\}.$$

a) Dokaži, da je $\mathcal{B}$ topologija na množici $\mathbb{R}$.

Rešitev: Enostavna preverba po definiciji (podoben argument smo zapisala pri vajah za topologijo končnih komplementov.)

b) Poišči zaprtji množic $\mathbb{Q}$ in $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ v tej topologiji.

Rešitev: $\mathbb{Q}^C := \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ je množica s števnim komplementom $((\mathbb{Q}^C)^C = \mathbb{Q})$, zato je $\mathbb{Q}^C$ odprta, torej je $\mathbb{Q}$ zaprta. Sledi, da je zaprtje $\mathbb{Q}$ enako $\mathbb{Q}$. (Še lažje je, če opazimo, da so zaprte množice natanko števne podmnožice $\mathbb{R}$ in pa $\mathbb{R}$).

Vsaka okolica točke v $\mathbb{R}$ vsebuje vse, razen števno mnogo elementov $\mathbb{R}$. Torej mora vsaka okolica vsake točke sekati neštevno množico $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$. Sledi, da je zaprtje $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ enako $\mathbb{R}$.

c) Dokaži, da je vsaka zvezna preslikava $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (Y, \tau_d)$ v diskreten topološki prostor (Y, τ_d) konstantna.

Rešitev: Recimo, da obstaja nekonstantna zvezna preslikava $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (Y, \tau_d)$. Tedaj obstaja točka $y \in Y$, tako da $A = f^{-1}(y) \neq \emptyset$ in $B = f^{-1}(Y - \{y\}) \neq \emptyset$. Zaradi zveznosti sta A in B odprti, torej sta $\mathbb{R} - B = A$ in $\mathbb{R} - A = B$ števni. Toda $\mathbb{R} = A \cup B$ je neštevna, unija dveh števnih množic pa ne more biti neštevna. Protislovje. Torej nekonstantna funkcija f ne obstaja.