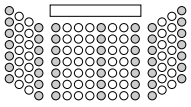
Prvi test iz splošne topologije

12. november 2013

Čas pisanja je 75 minut. Možno je doseči 15 točk. Vse odgovore je potrebno dobro utemeljiti. Veliko uspeha!



Sedež (2.05)

1	
2	
3	
Σ	

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (5 točk)

Teoretična naloga: Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna [P] oziroma napačna [N]. Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- [ ] Zaprtje množice A je največja zaprta podmnožica A.
- [ ] Za vsako preslikavo $f\colon X \to Y$ in vsako podmnožico $A \subseteq Y$ velja $f(f^{-1}(A)) = A$.
- [ ] Za poljubno množico A v topološkem prostoru X velja $A = \operatorname{Int} A \cup \textit{Meja}\, A \cup \operatorname{Int} A^C$.
- [ ] Če je $A \subset \mathbb{R}$ homeomorfen odprtemu intervalu $(0,1)$, potem je omejen.
- [ ] V vsakem topološkem prostoru je kardinalnost družine odprtih podmnožic enaka kardinalnosti družine zaprtih podmnožic.
- [ ] Topologija τ_1 na množici X je diskretna natanko tedaj, ko je za vsako topologijo τ_2 na množici X identična preslikava $id\colon (X,\tau_2) \to (X,\tau_1)$ zvezna.
- [ ] Če topološki prostor zadošča aksiomoma T_1 in T_4, potem zadošča tudi aksiomu T_3.
- [ ] Vsak metrični prostor je normalen.
- [ ] Kompozitum odprtih preslikav je odprta preslikava.
- [ ] Če je bijektivna preslikava odprta, je tudi zaprta.

2. naloga (5 točk)

Podana sta podprostora v ravnini $\mathbb{R}^2$.

$$X = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\right\} \cup \left\{(x,y) \mid (x^2 + y^2 = 1) \wedge (x < 0)\right\}$$

$$Y = \left\{(x,y) \mid 0 < y \leq -x^4 + 1\right\}$$

Dokaži, da sta prostora homeomorfna.

3. naloga (5 točk)

Za $\varphi \in (0, 2\pi)$ ter $r \geq 0$ definirajmo oznako $A(r,\varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$, ki predstavlja točko v ravnini $\mathbb{R}^2$. Na množici $X = \left\{A(r,\varphi) \mid \varphi \in (0,2\pi), r > 0\right\}$ definiramo metriko

$$d\Big(A(r_1,\varphi_1), A(r_2,\varphi_2)\Big) = \max\Big\{|\varphi_2 - \varphi_1|, |r_2 - r_1| + |\lfloor r_2 \rfloor - \lfloor r_1 \rfloor|\Big\},$$

pri čemer je $\lfloor x \rfloor$ celi del realnega števila x. Preverjanje, da je d res metrika ni potrebno.

a) Skiciraj $K\Big(A(1,\pi/2),1\Big)$ ter $\bar{K}\Big(A(3/2,3\pi/2),2\Big)$.

b) Določi notranjost, mejo ter zaprtje množic

$$B = \left\{A(r,\varphi) \mid \varphi \in (0,\pi), r \in [1,3/2)\right\}$$

$$C = \left\{A(r,\varphi) \mid \varphi \in (0,\pi), r \in [3/2,2)\right\}$$

c) Obravnavaj konvergenco zaporedij $a_n = A(1+1/n, 1+1/n), b_n = A(1-1/n, 1-1/n)$ ter $c_n = A(1/n, 1/n)$.