SPLOŠNA TOPOLOGIJA, TEST Z DNE 18. 12. 2009, REŠITEV

TEORETIČNA NALOGA Pravilne so trditve:

- Če je preslikava sestavljena iz usklajenih zveznih predpisov, definiranih na lokalno končnem odprtem pokritju, je zvezna.
- Vsako disjunktno odprto pokritje je avtomatično tudi zaprto pokritje.
- Bijekcija je odprta natanko tedaj, ko so slike članic dane podbaze odprte.
- Če je prostor s potmi povezan, je vedno povezan.
- Povezani podprostori evklidske premice so intervali.

1. PROBLEMSKA NALOGA $\mathcal{B} = \{[a,b) \mid a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}, a<b\}$

a. Za $x \in \mathbb{R}$ velja $x \in [\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1) \in \mathcal{B}$, torej je $\mathcal{B}$ pokritje.
Za $a,b,c,d \in \mathbb{Q}$ je $\max\{a,c\} = e \in \mathbb{Q}$ in $\min\{b,d\} = f \in \mathbb{Q}$. Presek $[a,b) \cap [c,d)$ je bodisi prazna množica ali pa je enak $[e,f) \in \mathcal{B}$. Izpolnjen je tudi 2. aksiom.

b. Za poljuben par realnih števil $x<y$ velja $(x,y) = \bigcup_{x<a<b<y;\ a,b\in\mathbb{Q}} [a,b)$, zato je τ finejša od evklidske topologije τ_E na $\mathbb{R}$.
Posebej zato τ zadošča aksiomoma T_2 in T_1.

c. $\mathcal{B}$ je indeksirana s podmnožico števne množice $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Zato je prostor $(\mathbb{R}, \tau)$ 2-števen in posledično tudi 1-števen in separabilen.

d. Zaporedji $(x_n)_n$ in $(y_n)_n$ sta konvergentni v evklidski topologiji, ki je šibkejša (in Hausdorffova). Zato je edini kandidat za limito zaporedja $(x_n)_n$ število $\sqrt{2}$, edini kandidat za limito zap. $(y_n)_n$ pa je število 0.

(i) Naj bo $[a,b)$ bazična okolica za $\sqrt{2}$. Ker $a \in \mathbb{Q}$, velja $a < \sqrt{2} < b$, interval (a,b) pa je odprt v evklidski topologiji. Zato je izven intervala (a,b) kvečjemu končno mnogo členov. Torej je zaporedje $(x_n)_n$ konvergentno v τ z limito $\sqrt{2}$.

(ii) Izven okolice $[0,1)$ za 0 leži neskončno mnogo členov zaporedja $(y_n)_n$ (vsi z lihimi indeksi). Zato zaporedje $(y_n)_n$ ni konvergentno v τ.

2. PROBLEMSKA NALOGA Naj velja $|f(x)| \leq M$ za vsako realno število x.

a. Množica B je povezana s potmi. Naj bo $(x,y) \in B$. Tedaj $y > f(x)$ in ker tudi $M \geq f(x)$ je preslikava $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x, (1-2t)y + 2t(M+1))$ za $t \leq \frac{1}{2}$ ter $\gamma(t) = ((2-2t)x, M+1)$ za $t \geq \frac{1}{2}$, pot od (x,y) do $(0, M+1) \in B$, ki vsa leži v B. Za A postopamo simetrično: $M+1$ nadomestimo z $-M-1$.

b. Preslikava $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = y - f(x)$, je kompozitum zveznih preslikav
$\mathbb{R}^2 \xrightarrow[(x,y)\mapsto(f(x),y)]{(f\circ pr_1,\, pr_2)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow[(u,v)\mapsto v-u]{\text{razlika koordinat}} \mathbb{R}$ (tu smo uporabili zveznost presl. f)
in je zvezna. Velja $B = F^{-1}((0,\infty))$ in $A = F^{-1}((-\infty,0))$. Ker je F zvezna in sta $(0,\infty)$ ter $(-\infty,0)$ odprti v $\mathbb{R}$, sta A in B odprti v $\mathbb{R}^2$. Ker sta $(0,\infty)$ in $(-\infty,0)$ disjunktni, sta A in B disjunktni. Ker je $\Gamma_f = F^{-1}(\{0\})$, je $A \cup B = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_f$.
Končno še $(0, M+1) \in B$ in $(0, -M-1) \in A$, torej je $A \cup B$ separacija za $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_f$.

c. Privzemimo, da je f nezvezna pri x_0. Tedaj $\exists \varepsilon > 0$ in $\exists$ zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ki konvergira k x_0, vendar pa je $|f(x_0) - f(x_n)| \geq \varepsilon$ za $\forall n$.
Tedaj obstaja neskončno mnogo indeksov n, za katere $f(x_0) - f(x_n) \geq \varepsilon$
ali pa — " — , — " — $f(x_0) - f(x_n) \leq -\varepsilon$.
Brez izgube splošnosti privzemimo, da velja $f(x_0) - f(x_n) \geq \varepsilon$ za vse indekse n.
Naj bo $y_0 := f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$. Velja $y_0 - f(x_n) \geq \frac{\varepsilon}{2}$, torej je $(x_n, y_0) \in B$.
Očitno pa je $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_0) = (x_0, y_0) \in A$. To pomeni, da zaprtje $\overline{B}$ množice B v prostoru $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_f$ seka množico A. Ker je B povezana, je tudi $\overline{B}$ povezana. Ker je A povezana množica, je $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_f = \overline{B} \cup A$ unija dveh povezanih množic z nepraznim presekom, torej povezana množica.