SPLOŠNA TOPOLOGIJA: 2. TEST
7. 1. 2011

Teoretična naloga (5 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna (**P**) oziroma napačna (**N**).
Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- ☐ Če topološki prostor zadošča aksiomu T_1, zadošča tudi aksiomu T_2.
- ☐ Regularnost je dedna topološka lastnost.
- ☐ Prostor X zadošča aksiomu T_1 natanko tedaj, ko so enoelementne množice zaprte.
- ☐ Hausdorffov 1-števen prostor je 2-števen.
- ☐ Zaprt podprostor povezanega prostora je povezan prostor.
- ☐ Naj bo $A \subset \mathbb{R}$. Če je $\bar{A}$ povezan prostor, je tudi A povezan prostor.
- ☐ S potmi povezan prostor je vedno tudi povezan.
- ☐ Naj bodo A, B, C povezani podprostori v X in $A \cap B \neq \emptyset$ ter $B \cap C \neq \emptyset$. Tedaj je $A \cup B \cup C$ povezan prostor.
- ☐ Povezan prostor, ki je lokalno s potmi povezan, je s potmi povezan.
- ☐ Topološki prostor X je kompakten natanko tedaj, ko obstaja kako končno odprto pokritje za X.

1. problemska naloga (5 točk)

Naj bo τ topologija na X in naj točka p ne pripada X. Definirajmo $\hat{X} = X \cup \{p\}$ in

$$\hat{\tau} = \{U \mid U \in \tau \text{ ali } (p \in U \text{ in } U^C \text{ je končna množica})\}.$$

a. Dokaži: $\hat{\tau}$ je topologija na množici $\hat{X}$.
b. Dokaži: Če X zadošča aksiomu T_1, mu zadošča tudi $\hat{X}$.
c. Naj bo X števna množica. Dokaži, da je X 1-števen natanko tedaj, ko je $\hat{X}$ 1-števen.
d. Naj bo $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Ali je $\hat{X}$ Hausdorffov?

Rešitve oziroma odgovore utemelji.

2. problemska naloga (5 točk)

Podana je družina podmnožic množice $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a \in \mathbb{Q},\, b \in \mathbb{R},\, a < b\}.$$

Dokaži:

a. $\mathcal{B}$ je baza neke topologije na $\mathbb{R}$.
b. Prirejeni topološki prostor $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}$ je 2-števen.
c. Prirejeni topološki prostor $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}$ je normalen.
d. Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{B}}$ je normalen.

Rešitve oziroma odgovore utemelji.