SPLOŠNA TOPOLOGIJA: 2. TEST
7. 1. 2011

Teoretična naloga (5 točk)

Pravilne so natanko 2., 3., 7., 8. in 9. trditev.

1. problemska naloga (5 točk)

a. (i) Ker $\emptyset \in \tau$, tudi $\emptyset \in \hat{\tau}$. Ker $p \in \hat{X}$ in $(\hat{X})^C = \emptyset$, je $\hat{X} \in \hat{\tau}$.
(ii) Privzemimo, da je $\{U_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\} \subset \hat{\tau}$ in pišimo $U := \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.
• Če velja $U_\lambda \in \tau$ za vse indekse λ, je $U \in \tau$ in zato $U \in \hat{\tau}$.
• Če $\exists \lambda_0 \in \Lambda$, za katerega $p \in U_{\lambda_0}$, je $p \in U$. Ker je $U^C = \cap_\lambda (U_\lambda^C) \subset U_{\lambda_0}^C$ in je $U_{\lambda_0}^C$ končna množica, je tudi U^C končna množica in je zato $U \in \hat{\tau}$.
(iii) Naj U in V pripadata množici τ.
• Če je $p \in U \cap V$, velja $p \in U$ in $p \in V$ in sta zato U^C in V^C končni množici. Posledično je zato $(U \cap V)^C = U^C \cup V^C$ končna množica in $U \cap V \in \hat{\tau}$.
• pri možnosti $p \notin U \cap V$ se v splošnem zalomi, deluje pa, če je X Fréchetev prostor.

b. Dokažimo, da so enoelementne množice zaprte. Naj bo $x \in X$. Tedaj velja $p \in \{x\}^C$ in $(\{x\}^C)^C = \{x\}$ je končna množica. Torej je $\{x\}^C \in \hat{\tau}$. Za p velja $\{p\}^C = X \in \tau$, torej je tudi $\{p\}^C \in \hat{\tau}$ - kar smo trdili.

c. Označimo $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ in $V_n = \hat{X} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Po definiciji so V_n odprte okolice za p v $\hat{X}$. Dokažimo najprej, da je $\hat{X}$ 1-števen pri p: števna baza okolic za p je kar $\mathcal{V} = \{V_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Če je V poljubna okolica za p v $\hat{X}$, je končna množica V^C vsebovana v množici $\{x_1, \ldots, x_n\}$ za neko dovolj veliko število n. Tedaj pa je $V_n \subset V$.
• Privzemimo, da je X 1-števen, in vzemimo $x \in X$. Naj bo $\mathcal{B}_x$ števna baza okolic za x v τ. Trdimo, da je $\hat{\mathcal{B}}_x = \mathcal{B}_x \cup \{(\{x\} \cup V_n) \cap X \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ števna baza okolic za x v $\hat{\tau}$: Naj bo U odprta okolica za x v $\hat{\tau}$. Če je $U \in \tau$, potem obstaja množica $V \in \mathcal{B}_x$, za katero je $V \subset U$. Če $p \in U$, je U hkrati okolica za p. Zato za neko število n velja $V_n \subset U$. Torej tudi $(\{x\} \cup V_n) \cap X \subset U$.
• Naj bo zdaj $\hat{X}$ 1-števen in naj bo $\hat{\mathcal{B}}_x$ števna baza okolic za $x \in X$ v topologiji $\hat{\tau}$. Trdimo, da je $\mathcal{B}_x = \{V \,|\, V \in \hat{\mathcal{B}}_x,\, V \subset X\}$ baza okolic za x v τ. Res, če je $U \in \tau$ in $x \in U$, je U tudi okolica za x v $\hat{\tau}$. Torej obstaja članica V družine $\hat{\mathcal{B}}_x$, za katero je $V \subset U$. Ker je $U \subset X$, je $V \in \mathcal{B}_x$, torej je $\mathcal{B}_x$ števna baza okolic za x v τ.

d. Naj bo U odprta okolica za 0 v $\hat{\tau}$, ki ne vsebuje točke p. Tedaj je U odprta v X in zaradi konvergence obstaja tako naravno število N, da velja $\{\frac{1}{n} \,|\, n \geqslant N\} \subset U$. Posebej, U^C je končna množica. Če je V poljubna okolica za p, je V^C končna množica, torej je tudi $(U \cap V)^C = U^C \cup V^C$ končna množica in zato $U \cap V \neq \emptyset$. Zato $\hat{X}$ ni Hausdorffov.

2. problemska naloga (5 točk)

a. Ker je $\mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1)$, je $\mathcal{B}$ pokritje. Naj bo $[a, b) \in \mathcal{B}$ in $[c, d) \in \mathcal{B}$. Če $[a, b) \cap [c, d)$ ni prazna množica, velja $[a, b) \cap [c, d) = [\max\{a, c\}, \min\{b, d\})$. Slednji interval pripada družini $\mathcal{B}$, ker je $\max\{a, c\} \in \mathbb{Q}$.

b. Trdimo, da je števna družina $\mathcal{B}' = \{[a, b) \,|\, a \in \mathbb{Q},\, b \in \mathbb{Q},\, a < b\}$ tudi baza za $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}$. Ker je $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, moramo dokazati le to, da je vsak element baze $\mathcal{B}$ unija članic družine $\mathcal{B}'$. Res, naj bo $a \in \mathbb{Q}$ in naj bo $b > a$. Tedaj obstaja zaporedje $b_n \in \mathbb{Q} \cap [a, b)$, za katerega je $\sup_n b_n = b$. Torej velja $\cup_{n \in \mathbb{N}} [a, b_n) = [a, b)$, kar smo trdili.

c. Za vsak realni interval (a, b) obstaja zaporedje $a_n \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$, za katerega je $\inf_n a_n = a$ in posledično $(a, b) = \cup_n [a_n, b)$. Torej je topologija $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}$ finejša od običajne in je Hausdorffova. Poleg tega so članice družine $\mathcal{B}'$ vedno zaprte množice: če $a, b \in \mathbb{Q}$, je

$$[a, b)^C = \big(\cup_{n \in \mathbb{N}} [a - n, a) \big) \cup \big(\cup_{n \in \mathbb{N}} [b, b + n) \big)$$

odprta množica. Če je U poljubna odprta okolica za x v $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}$, obstaja torej odprto-zaprta množica $[a, b)$, za katero $x \in [a, b) \subset U$. Posledično je $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}$ regularen prostor. Ker je 2-števen, je normalen.

d. Produkt 2-števnih regularnih prostorov je 2-števen regularen prostor. Torej je normalen.