Rešitve drugega testa iz splošne topologije

6. januar 2012

1. naloga

Teoretična naloga: Za poljubnih deset od enajstih spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna $\boxed{\text{P}}$ oziroma napačna $\boxed{\text{N}}$. Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

$\boxed{\text{N}}$ Podprostor povezanega prostora je povezan.

$\boxed{\text{P}}$ Obstaja topologija τ na množici $X = \{1, 2, 3\}$ v kateri je (X, τ) povezan.

$\boxed{\text{N}}$ Iracionalna števila so zaprt podprostor v $\mathbb{R}$ (v evklidski metriki).

$\boxed{\text{P}}$ Vsaka komponenta za povezanost s potmi je povezan podprostor.

$\boxed{\text{N}}$ Vsak T_4 prostor je tudi T_1.

$\boxed{\text{P}}$ Vsak metrični prostor je normalen.

$\boxed{\text{P}}$ Na množici $\{1, 2, 3\}$ obstaja natanko ena topologija z lastnostjo T_2.

$\boxed{\text{N}}$ Unija dveh povezanih prostorov je povezan prostor.

$\boxed{\text{P}}$ Končna podmnožica regularnega prostora je vedno zaprta.

$\boxed{\text{P}}$ Če je prostor X nepovezan potem obstaja zvezna surjekcija na diskreten prostor na dveh točkah.

$\boxed{\text{P}}$ Produkt regularnih prostorov je regularen.

2. naloga

Na množici naravnih števil $\mathbb{N}$ definiramo topologijo τ na naslednji način (s spodnjim predpisom res definirana topologija, kar ni potrebno preverjati):

$$U \subset \mathbb{N} \textit{ je odprta } \Leftrightarrow \forall n : (2n \in U \Rightarrow 2n+1 \in U).$$

a) Ali je prostor $(\mathbb{N}, \tau)$ 1-števen, 2-števen, separabilen?

Rešitev: Zlahko utemeljimo, da ima prostor števno bazo $\{1\}, \{2,3\}, \{3\}, \{4,5\}, \{5\}, \{6,7\}, \{7\}, \ldots$ zato je $1-$števen in $2-$števen. Ker je prostor števen je separabilen.

b) Obravnavaj separacijske lastnosti T_0, T_1, T_2, T_3 in T_4 prostora $(\mathbb{N}, \tau)$.

Rešitev: Prostor ima lastnost T_0: Naj bosta $x, y \in \mathbb{N}$. Če je vsaj ena točka (recimo x) liha, potem je $\{x\}$ odprta množica, ki separira x od y. Če sta obe točki sodi, potem je $\{x, x+1\}$ odprta množica, ki separira x od y.

Prostor nima lastnosti T_1, T_2: Vsaka okolica točke 2 vsebuje 3 torej točke 2 ne moremo ločiti od 3.

Prostor nima lastnosti T_3: Množica $\{2\}$ je zaprta (ker je njen komplement odprt) a se je po prejšnjem argumentu ne da ločiti od točke 3.

Prostor ima lastnost T_4: Podmnožica $Z \subset \mathbb{N}$ je zaprta natanko tedaj, ko velja naslednji pogoj; $\forall n : (2n+1 \in Z \Rightarrow 2n \in Z)$. Naj bosta A in B zaprti podmnožici $\mathbb{N}$. Konstruiramo množico A' tako, da množici A dodamo tista liha števila, katerih (sodi) predhodnik je v A. Na isti način definiramo B'. Za množico A' (in tudi za B') velja naslednji pogoj; $\forall n : (2n+1 \in A' \Leftrightarrow 2n \in A')$. Zato sta A' in B' odprti (in tudi zaprti) okolici množic A in B. Poleg tega sta množici disjunktni:

- $1 \notin A' \cap B'$ ker $1 \in A \Leftrightarrow 1 \in A'$ in $1 \in B \Leftrightarrow 1 \in B'$ (v procesu konstruiranja A' in B' nikoli ne dodamo elementa 1) ter sta A in B disjunktni.
- če bi $A' \cap B'$ vseboval sodo število x potem bi veljalo $x \in A \cap B = \emptyset$, saj sta množici A' in B' dobljeni iz A in B z dodajanjem lihih števil.
- če bi $A' \cap B'$ vseboval liho število $x \neq 1$, potem bi vseboval tudi sodo število $x-1$, kar je po prejšnjem argumentu nemogoče.

c) Ugotovi, ali je prostor $(\mathbb{N}, \tau)$ povezan in ali je s lokalno s potmi povezan.

Rešitev: Prostor ni povezan, separacija je med drugim $\{1\}$ in $\{2, 3, 4, \ldots\}$. Prostor je lokalno s potmi povezan:

- Najmanjša okolica lihega števila n je $\{n\}$, ki je s potmi povezana.
- Najmanjša okolica sodega števila n je $\{n, n+1\}$, ki je tudi s potmi povezana. Ker so odprte podmnožice okolice (kot podprostora) $\{n, n+1\}$ natanko $\emptyset, \{n+1\}$ in $\{n, n+1\}$, je pot $\gamma\colon [0,1] \to \{n, n+1\}$ definirana kot $\gamma\big([0, 1/2)\big) = \{n+1\}, \gamma\big([1/2, 1]\big) = \{n\}$ zvezna pot med $n+1$ in n: $\gamma^{-1}(\{n+1\}) = [0, 1/2)$, $\gamma^{-1}(\{n, n+1\}) = [0,1]$ in $\gamma^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, torej so praslike vseh treh odprtih okolic odprte v $[0,1]$.

3. naloga

Naj bosta a in b pozitivni realni števili. Podan je podprostor v $\mathbb{R}^2$:

$$X_{a,b} = \big(\{0\} \times [-a, b]\big) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = (1 + 1/n)^2\}.$$

V odvisnosti od parametrov a in b obravnavaj povezanost in lokalno povezanost s potmi prostora $X_{a,b}$.

Rešitev: Iz skic ugotovimo, da je prostor povezan natanko tedaj, ko je $a \geq 2$ ali $b \geq 2$ (sicer je največna krožnica svoja komponenta) in lokalno s potmi povezan natanko tedaj, ko $(a \neq 1) \wedge (b \neq 1)$. (ti dve dejstvi je potrebno še utemeljiti) Nekaj primerov je skiciranih spodaj.