VAJE IZ SPLOŠNE TOPOLOGIJE V ŠTUDIJSKEM LETU 2013/2014, 1. SKLOP

1. naloga

Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$ in $a < b$.
Pokaži, da obstaja zvezna bijekcija $[0,1] \to [a,b]$ z zveznim inverzom.

2. naloga

Pokaži, da obstaja zvezna bijekcija $(0,1) \to (0,\infty)$ z zveznim inverzom.

3. naloga

Konstruiraj zvezno bijekcijo $[0,\infty) \to S^1$.
Obravnavaj zveznost inverza s pomočjo zaporedij ter s pomočjo kompaktnosti.

4. naloga

Na ravnini $\mathbb{R}^2$ obravnavamo standardno evklidsko metriko d in metriko D, definirano z naslednjim predpisom:

$$D\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \begin{cases} |x_1 - x_2|, & y_1 = y_2, \\ |x_1| + |y_1 - y_2| + |x_2|, & y_1 \neq y_2. \end{cases}$$

a. Skiciraj vse možne krogle v metriki D.
b. Primerjaj zaprto kroglo $\bar{K}\big((0,0),1\big)$ z zaprtjem odprte krogle $K\big((0,0),1\big)$.
c. Določi notranjost, zaprtje in mejo množice $A = (-1,1) \times [0,1)$ glede na metriki d in D.
d. Obravnavaj konvergenco zaporedja $x_n = \frac{n-1}{n}$ v metrikah d in D.
e. Obravnavaj zveznost identične funkcije $\mathrm{id}\colon (X,D) \to (X,d)$.

5. naloga

Prostor $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ zveznih funkcij $[0,1] \to \mathbb{R}$ opremimo z metriko $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$.
a. Obravnavaj konvergenco zaporedij $f_n(x) = \max\{0, 1 - nx\}$ in $g_n(x) = \max\{0, n - n^3 x\}$.
b. Obravnavaj zaporedje $f_n(x) = \max\{0, n - n^2 x\}$. (Dokaži, da zaporedje ni Cauchyjevo.)
c. Obravnavaj konvergenco zaporedja $f_n(x) = \min\{\max\{0, 2nx - n + 1\}, 1\}$. (Dokaži, da je zaporedje Cauchyjevo, pa ni konvergentno.)

6. naloga

Na prostoru $C^\infty\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ neskončnokrat zvezno odvedljivih realnih funkcij na intervalu $[0,1]$ je podana metrika $d_\infty(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.
a. Dokaži, da je zaporedje $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ konvergentno (glede na metriko d_∞).
b. Dokaži, da preslikava $\Phi\colon C^\infty\big([0,1],\mathbb{R}\big) \to C^\infty\big([0,1],\mathbb{R}\big)$, $\Phi(f) = f'$, ni zvezna.