VAJE IZ SPLOŠNE TOPOLOGIJE V ŠTUDIJSKEM LETU 2009/2010, 2. SKLOP

1. naloga

Pokaži, da je kartezični produkt $S^1 \times I$ homeomorfen kolobarju $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

2. naloga

Naj bo X poljubna množica in definirajmo $\mathcal{O} = \{U \subset X \mid U^C$ je končna ali $U = \emptyset\}$. Pokaži, da je $\mathcal{O}$ topologija na množici X, ki jo imenujemo *topologija končnih komplementov.*

Naj bo $X = \mathbb{N}$, $A_1 = \{42\}$ in $A_2 = 2\mathbb{N}$. Za $i = 1, 2$ poišči v topologiji končnih komplementov največjo odprto množico U_i in najmanjšo zaprto množico Z_i, da je $U_i \subset A_i \subset Z_i$.

3. naloga

Naj bo X poljubna množica in $x_0 \in X$ poljubna točka. Naj bo $\mathcal{O} = \{U \subset X \mid x_0 \in X$ ali $X = \emptyset\}$. Pokaži, da je $\mathcal{O}$ topologija na množici X, ki jo imenujemo *topologija vsebovane točke.*

Naj bo $X = \mathbb{N}$ in $x_0 = 1$. Naj bo B_1 množica vseh praštevil in $B_2 = \{2, 3\}$. Za $i = 1, 2$ poišči v topologiji vsebovane točke največjo odprto množico U_i in najmanjšo zaprto množico Z_i, da je $U_i \subset B_i \subset Z_i$.

4. naloga

Naj bo τ_K topologija končnih komplementov na množici $\mathbb{R}$ in τ_V topologija vsebovane točke na $\mathbb{R}$, kjer za izbrano točko vzamemo ničlo. Topologija τ_N na $\mathbb{R}$ pa je podana z zaprtimi množicami $\mathcal{F} = \{F \subset \mathbb{R} \,|\, 0 \in F$ ali $F = \emptyset\}$. Ali je kateri od prostorov $(\mathbb{R}, \tau_K)$, $(\mathbb{R}, \tau_V)$ in $(\mathbb{R}, \tau_N)$ separabilen?

5. naloga

Naj bo $a_n = n$ in $b_n = \frac{1}{n}$. Določi stekališča in limite zaporedij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ter $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v vsakem od prostorov $(\mathbb{R}, \tau_K)$, $(\mathbb{R}, \tau_V)$ in $(\mathbb{R}, \tau_N)$.