VAJE IZ SPLOŠNE TOPOLOGIJE V ŠTUDIJSKEM LETU 2010/2011, 2. SKLOP

1. naloga

Pokaži, da je spodnjih 8 prostorov homeomorfnih.

$$X_1 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, 0 \leqslant y \leqslant 1 - |x|,\, y \neq 1\big\}$$
$$X_2 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x^2 + y^2 \leqslant 1,\, y < 1\big\}$$
$$X_3 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\big\} \setminus [0,1] \times \{0\}$$
$$X_4 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x^2 + y^2 \leqslant 1,\, y > 0\big\}$$
$$X_5 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x^2 + y^2 < 1,\, y \geqslant 0\big\}$$
$$X_6 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, y \geqslant 0\big\} = \mathbb{R} \times [0,\infty) = \mathbb{R}^2_+$$
$$X_7 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x \geqslant 0,\, y \geqslant 0\big\} = [0,\infty) \times [0,\infty)$$
$$X_8 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, |x| \leqslant 1,\, 0 \leqslant y < 1\big\} = [-1,1] \times [0,1)$$

2. naloga

Pokaži, da je kartezični produkt $S^1 \times I$ homeomorfen kolobarju $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

3. naloga

Naj bo X poljubna množica in definirajmo $\mathcal{O} = \{U \subset X \mid U^C \text{ je končna ali } U = \emptyset\}$. Pokaži, da je $\mathcal{O}$ topologija na množici X, ki jo imenujemo *topologija končnih komplementov.*
Naj bo $X = \mathbb{N}$, $A_1 = \{42\}$ in $A_2 = 2\mathbb{N}$. Za $i = 1,2$ poišči v topologiji končnih komplementov največjo odprto množico U_i in najmanjšo zaprto množico Z_i, da je $U_i \subset A_i \subset Z_i$.

4. naloga

Naj bo X poljubna množica in $x_0 \in X$ poljubna točka. Naj bo $\mathcal{O} = \{U \subset X \mid x_0 \in X \text{ ali } X = \emptyset\}$. Pokaži, da je $\mathcal{O}$ topologija na množici X, ki jo imenujemo *topologija vsebovane točke.*
Naj bo $X = \mathbb{N}$ in $x_0 = 1$. Naj bo B_1 množica vseh praštevil in $B_2 = \{2,3\}$. Za $i = 1,2$ poišči v topologiji vsebovane točke največjo odprto množico U_i in najmanjšo zaprto množico Z_i, da je $U_i \subset B_i \subset Z_i$.