

**VAJE IZ SPLOŠNE TOPOLOGIJE V ŠTUDIJSKEM LETU 2009/2010,
3. SKLOP**

1. NALOGA

Naj bo $f: X \rightarrow Y$ preslikava med topološkima prostoroma.

Pokaži, da je f zvezna natanko tedaj, ko za vsako množico $A \subset X$ velja $f(\text{Cl } A) \subset \text{Cl } f(A)$.

2. NALOGA

Za preslikavo $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definirano s predpisom

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, & (x_1, y_1) = \lambda(x_2, y_2) \text{ za neki } \lambda \in \mathbb{R}, \\ \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}, & \text{sicer,} \end{cases}$$

preveri, da je metrika na \mathbb{R}^2 . (Metriko d imenujemo *poštarska* ali tudi *metrojska* metrika.)

- a. Skiciraj krogle $K((0, 0), 1)$, $K((4, 3), 3)$ in $K((4, 3), 6)$.
- b. Pokaži, da je metrika d strogo finejša od evklidske metrike d_E .
- c. Ali je kateri od prostorov (\mathbb{R}^2, d) in (\mathbb{R}^2, d_E) separabilen?

3. NALOGA

Naj bosta τ_1 in τ_2 topologiji na množici X .

Pokaži, da so naslednje trditve ekvivalentne:

- a. Topologija τ_1 je močnejša od topologije τ_2 .
- b. Preslikava $\text{id}: (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$ je zvezna.
- c. Če je preslikava $f: (X, \tau_2) \rightarrow Y$ zvezna, je tudi preslikava $f: (X, \tau_1) \rightarrow Y$ zvezna.
- d. Če je preslikava $f: Y \rightarrow (X, \tau_1)$ zvezna, je tudi preslikava $f: Y \rightarrow (X, \tau_2)$ zvezna.

4. NALOGA

- a. Poišči množico $A \subset \mathbb{R}$, za katero ne velja enakost $\text{Meja } A = \text{Meja}(\text{Meja } A)$.
- b. Naj bo A zaprta podmnožica prostora X . Pokaži, da tedaj velja $\text{Meja } A = \text{Meja}(\text{Meja } A)$.
- c. Naj bo A poljubna podmnožica prostora X . Pokaži, da velja $\text{Meja}(\text{Meja } A) = \text{Meja}(\text{Meja}(\text{Meja } A))$.