

**VAJE IZ SPLOŠNE TOPOLOGIJE V ŠTUDIJSKEM LETU 2010/2011,
3. SKLOP**

1. NALOGA

V topologiji končnih komplementov na množici naravnih števil \mathbb{N} obravnavaj:

- konvergenčne lastnosti zaporedja $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$,
- konvergenčne lastnosti zaporedja $1, 2, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 5, 2, \dots$,
- zveznost preslikave $f(n) = n^2$,
- zveznost preslikave $f(n) = (n \bmod 7) + 1$.

2. NALOGA

Naj bo $f: X \rightarrow Y$ preslikava med topološkima prostoroma.

Pokaži, da je f zvezna natanko tedaj, ko za vsako množico $A \subset X$ velja $f(\text{Cl } A) \subset \text{Cl } f(A)$.

3. NALOGA

Sorgenfreyeva topologijo τ_S na množici realnih števil \mathbb{R} vpeljemo z bazo:

$$\mathcal{B}_S = \{[a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Prostor \mathbb{R} , opremljen s topologijo τ_S , imenujemo tudi „Sorgenfreyeva premica.“

- a. Prepričaj se, da je \mathcal{B}_S res baza neke topologije na \mathbb{R} . To topologijo označimo s τ_S .
- b. Dokaži, da je topologija τ_S strogo močnejša od običajne, evklidske topologije na \mathbb{R} .
- c. Dokaži, da sta tudi družina $\mathcal{B}' = \{[a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ in družina $\mathcal{B}'' = \{[a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, a < b\}$ bazi za τ_S .

4. NALOGA

Naj bo \mathbb{R} evklidska premica, \mathbb{R}_S pa naj bo Sorgenfreyeva premica.

- a. Ali je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, zvezna, odprta, zaprta?
- b. Ali je $f: \mathbb{R}_S \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, zvezna, odprta, zaprta?
- c. Ali je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_S$, $f(x) = x^2$, zvezna, odprta, zaprta?

5. NALOGA

Naj bosta τ_1 in τ_2 topologiji na množici X .

Pokaži, da so naslednje trditve ekvivalentne:

- a. Topologija τ_1 je močnejša od topologije τ_2 .
- b. Preslikava $\text{id}: (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$ je zvezna.
- c. Če je preslikava $f: (X, \tau_2) \rightarrow Y$ zvezna, je tudi preslikava $f: (X, \tau_1) \rightarrow Y$ zvezna.
- d. Če je preslikava $f: Y \rightarrow (X, \tau_1)$ zvezna, je tudi preslikava $f: Y \rightarrow (X, \tau_2)$ zvezna.