

VAJE IZ SPLOŠNE TOPOLOGIJE, 4. SKLOP

1. NALOGA

Preslikava $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ki ima lokalni ekstrem, ni odprta preslikava.

2. NALOGA

Dokaži, da je preslikava $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, definirana s predpisom $f(x) = x^2$, zvezna, odprta in zaprta.

3. NALOGA

Dokaži, da je preslikava $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ zvezna in odprta, ni pa zaprta preslikava.

4. NALOGA

Označimo množico $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{(0, 0)\}$ in definirajmo družino τ (odprtih) množic na naslednji način:

$$U \in \tau \iff (0, 0) \notin U \text{ ali } \exists N \ni n \in \mathbb{N}, n > N \implies (\{n\} \times \mathbb{N}) \setminus U \text{ je končna množica.}$$

- Dokaži, da družina τ izpolnjuje aksiome za družino odprtih množic.
- Dokaži, da točka $(0, 0)$ leži v zaprtju množice $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, torej $(0, 0) \in \overline{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$.
- Kakšne so zaprte množice v topologiji τ ?
- Dokaži, da ne obstaja zaporedje $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, za katerega $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} (0, 0)$.
Sklepaj, da X ni 1-števen prostor.
- Preslikava $id: (X, \tau) \rightarrow (X, \text{diskretna topologija})$ ni zvezna pri $(0, 0)$, slika pa vsako konvergentno zaporedje v konvergentno zaporedje (ki konvergira k sliki limite).

5. NALOGA

Razišči separacijske lastnosti topologije končnih komplementov na množici \mathbb{N} .