

**VAJE IZ SPLOŠNE TOPOLOGIJE V ŠTUDIJSKEM LETU 2012/2013,
4. SKLOP**

1. NALOGA

Dokaži: Preslikava $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ki ima lokalni ekstrem, ni odprta preslikava.

2. NALOGA

Dokaži, da je $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ zvezna in odprta preslikava, ki ni zaprta.

3. NALOGA

Na množici realnih števil \mathbb{R} vpeljemo topologijo z bazo $\mathcal{B} = \{(-a, a) \mid a > 0\}$.

- a. Pokaži, da je \mathcal{B} baza neke topologije na \mathbb{R} .
- b. Obravnaj konvergenco zaporedja $(\frac{n+1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$.
- c. Razišči separabilnost, 1-štavnost in 2-štavnost.

4. NALOGA

Za naravni števili a, b definiramo množico

$$U_{a,b} = \{na + b \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{b, a+b, 2a+b, 3a+b, \dots\}.$$

Dalje definiramo družino podmnožic množice naravnih števil

$$\mathcal{B} = \{U_{a,b} \mid a \text{ in } b \text{ sta si tuji naravni števili}\}.$$

Dokaži naslednje trditve.

- a. Družina \mathcal{B} je baza neke topologije na \mathbb{N} . Označimo jo s τ .
- b. Za vsako praštevilo p je množica $p \cdot \mathbb{N}$ zaprta v τ .
- c. Za množico $A = \mathbb{N} - \{1\}$ določi $\text{Int } A$ in \bar{A} .

5. NALOGA

Sorgenfreyeve topologijo τ_S na množici realnih števil \mathbb{R} vpeljemo z bazo:

$$\mathcal{B}_S = \{[a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Prostor \mathbb{R} , opremljen s topologijo τ_S , imenujemo tudi „Sorgenfreyeva premica.“

- a. Prepričaj se, da je \mathcal{B}_S res baza neke topologije na \mathbb{R} . To topologijo označimo s τ_S .
- b. Dokaži, da je topologija τ_S strogo močnejša od običajne, evklidske topologije na \mathbb{R} .
- c. Dokaži, da sta tudi družina $\mathcal{B}' = \{[a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ in družina $\mathcal{B}'' = \{[a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, a < b\}$ bazi za τ_S .
- d. Dokaži, da je (\mathbb{R}, τ_S) separabilen in 1-štven, ni pa 2-štven.