VAJE IZ SPLOŠNE TOPOLOGIJE V ŠTUDIJSKEM LETU 2009/2010
5. SKLOP

1. NALOGA

Razišči separacijske lastnosti topologije končnih komplementov na množici $\mathbb{N}$.

2. NALOGA

Na množici realnih števil $\mathbb{R}$ vpeljemo topologijo z bazo $\mathcal{B} = \{(-a, a) \mid a > 0\}$.

a. Razišči separacijske lastnosti.
b. Razišči separabilnost, 1-števnost in 2-števnost.

3. NALOGA

Sorgenfreyevo topologijo τ_S na množici realnih števil $\mathbb{R}$ vpeljemo tako, da proglasimo za bazo naslednjo družino množic:

$$\mathcal{B}_S = \{[a, b) \mid a < b\}.$$

Prostor $\mathbb{R}$, opremljen s topologijo τ_S, imenujemo tudi „Sorgenfreyeva premica.“

a. Prepričaj se, da je $\mathcal{B}_S$ res baza neke topologije na $\mathbb{R}$. To topologijo označimo s τ_S.
b. Dokaži, da je topologija τ_S strogo močnejša od običajne, evklidske topologije na $\mathbb{R}$. Sklepaj, da je τ_S Hausdorffova topologija.
c. Dokaži, da je prostor $(\mathbb{R}, \tau_S)$ separabilen in 1-števen prostor.
d. Dokaži, da prostor $(\mathbb{R}, \tau_S)$ ni 2-števen.
e. Dokaži, da prostor $(\mathbb{R}, \tau_S)$ zadošča separacijskima aksiomoma T_3 in T_4.

4. NALOGA

Naj bo X poljuben topološki prostor in naj bo Y Hausdorffov prostor. Dalje naj bosta $f, g \colon X \to Y$ zvezni preslikavi. Pokaži, da je incidenčna množica $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ zaprta.

5. NALOGA

Naj bo X topološki prostor. Dokaži, da so naslednje trditve ekvivalentne:

a. X je Hausdorffov.
b. Za vsako točko $x \in X$ je presek vseh zaprtih okolic točke x enak enoelementni množici $\{x\}$.
c. Diagonala $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ je zaprta podmnožica topološkega produkta $X \times X$.