VAJE IZ SPLOŠNE TOPOLOGIJE V ŠTUDIJSKEM LETU 2010/2011, 6. SKLOP

1. naloga

Dokaži, da Sorgenfreyeva ravnina ni 2-števen prostor. Sklepaj, da tudi Sorgenfreyeva premica ni 2-števen prostor.

2. naloga

a. Dokaži, da je produkt dveh T_3 prostorov spet T_3 prostor.
b. Dokaži, da je produkt dveh 2-števnih normalnih prostorov normalen prostor.

3. naloga

Označimo množico $X = \mathbb{N}\times\mathbb{N} \cup \{(0,0)\}$ in definirajmo družino τ (odprtih) množic na naslednji način:

$$U \in \tau \iff (0,0) \notin U \text{ ali } \exists N \ni: n \in \mathbb{N},\, n > N \implies (\{n\}\times\mathbb{N}) \setminus U \text{ je končna množica.}$$

a. Dokaži, da družina τ izpolnjuje aksiome za družino odprtih množic.
b. Dokaži, da točka $(0,0)$ leži v zaprtju množice $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, torej $(0,0) \in \overline{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.
c. Kakšne so zaprte množice v topologiji τ?
d. Dokaži, da ne obstaja zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, za katerega $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} (0,0)$.
Sklepaj, da X ni 1-števen prostor.
e. Preslikava $id\colon (X,\tau) \to (X, \text{diskretna topologija})$ ni zvezna pri $(0,0)$, slika pa vsako konvergentno zaporedje v konvergentno zaporedje (ki konvergira k sliki limite).

4. naloga

Naj bo X neskončna množica in naj bo $p \in X$. V množico X vpeljemo topologijo s predpisom

$$\tau := \left\{U \,\middle|\, U \subset X,\ U^C \text{ je končna množica ali } p \in U^C\right\}.$$

a. Pokaži, da je τ topologija, ki zadošča separacijskim aksiomom T_1, T_2, T_3 in T_4.
b. Pokaži, da je mogoče prostor X zaprto vložiti v prostor realnih števil $\mathbb{R}$, če je X **števna** množica (brez izgube splošnosti lahko privzameš $X = \{0,1,2,3,\dots\}$, $p = 0$ v tem primeru). Natančneje, konstruiraj zvezno in zaprto injektivno preslikavo $f : X \to \mathbb{R}$.
c. Pokaži, da točka p nima števne baze okolic, če je množica X **neštevna**.
Nasvet. Pri privzetku da je $\{U_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ števna baza okolic za točko p, dokaži, da obstaja $q \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i,\ q \neq p$, in iz tega sklepaj na protislovje.