VAJE IZ SPLOŠNE TOPOLOGIJE V ŠTUDIJSKEM LETU 2009/2010
7. SKLOP

1. naloga

Naj bo $\mathbb{R}$ evklidska premica, $\mathbb{R}_S$ pa naj bo Sorgenfreyeva premica.

a. Ali je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_S$, $f(x) = x^2$, zvezna, odprta, zaprta?
b. Ali je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_S$, $f(x) = \sin(x)$, zvezna, odprta, zaprta?

2. naloga

Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinom. Dokaži, da je f zaprta preslikava.

3. naloga

Naj bo X metrični prostor in naj bo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje brez stekališč. Dalje naj bo $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ zaporedje pozitivnih števil, ki konvergira proti 0. Tedaj je družina $\left\{\bar{K}(x_n, r_n) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ lokalno končna v X.

4. naloga

Naj bo X neskončna množica in naj bo $p \in X$. V množico X vpeljemo topologijo s predpisom

$$\tau := \left\{U \,\middle|\, U \subset X,\ U^C \text{ je končna množica ali } p \in U^C\right\}.$$

a. Pokaži, da je τ topologija, ki zadošča separacijskim aksiomom T_1, T_2, T_3 in T_4.
b. Pokaži, da je mogoče prostor X zaprto vložiti v prostor realnih števil $\mathbb{R}$, če je X **števna** množica (brez izgube splošnosti lahko privzameš $X = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $p = 0$ v tem primeru). Natančneje, konstruiraj zvezno in zaprto injektivno preslikavo $f : X \to \mathbb{R}$.
c. Pokaži, da točka p nima števne baze okolic, če je množica X **neštevna**.
Nasvet. Pri privzetku da je $\{U_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ števna baza okolic za točko p, dokaži, da obstaja $q \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i$, $q \neq p$, in iz tega sklepaj na protislovje.