VAJE IZ SPLOŠNE TOPOLOGIJE V ŠTUDIJSKEM LETU 2009/2010
8. SKLOP

1. NALOGA

Pokaži, da sta topološka prostora $[0,\infty)$ in

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{1+\tfrac{1}{k}\}\times[-\tfrac{1}{k},\tfrac{1}{k}] \cup [-1-\tfrac{1}{k},1+\tfrac{1}{k}]\times\{\tfrac{1}{k}\} \cup \{-1-\tfrac{1}{k}\}\times[-\tfrac{1}{k+1},\tfrac{1}{k}] \cup [-1-\tfrac{1}{k},1+\tfrac{1}{k+1}]\times\{-\tfrac{1}{k+1}\}$$

homeomorfna.

2. NALOGA

Podprostora X in Y ravnine $\mathbb{R}^2$ sta podana s predpisoma

$$X = \{t\cdot(n,1) \,|\, t\in[0,1],\ \ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}\,,$$
$$Y = \{t\cdot(m,1) \,|\, t\in[0,1],\ \ m\in\mathbb{Z}\}\,.$$

Pokaži, da sta prostora X in Y homeomorfna.

3. NALOGA

Ali je kateri od prostorov

$$X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{Q} \text{ ali } y\in\mathbb{Q}\}$$
$$Y = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{Q} \text{ in } y\in\mathbb{Q}\}$$
$$Z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\notin\mathbb{Q} \text{ in } y\notin\mathbb{Q}\}$$

povezan ali povezan s potmi?

4. NALOGA

Naj bo $U\subset\mathbb{R}^n$ odprta množica. Pokaži, da je U povezana natanko tedaj, ko je povezana s potmi.

5. NALOGA

Naj bo X metrični prostor. Pokaži, da je $A\subset X$ nepovezana natanko tedaj, ko obstajata disjunktni odprti množici U in V v X, da je $U\cap A\neq\emptyset$, $V\cap A\neq\emptyset$ in $A\subset U\cup V$.

6. NALOGA

Naj bo $X=\mathbb{N}-\{1\}$ in za vsak $n\in X$ naj bo $B_n=\{k\in X \mid k \text{ deli } n\}$.

a. Pokaži, da je $\mathcal{B}=\{B_n \mid n\in X\}$ baza neke topologije na X.
b. Ali je X s topologijo, ki jo inducira $\mathcal{B}$, povezan?