

# Izpit iz verjetnosti in statistike

Matematika – bolonjski univerzitetni študij in pedagoška matematika  
26. avgust 2011

1. Pri neki igri se v eni izmed štirih škatel skriva nagrada, v vsaki škatli z enako verjetnostjo. Igra poteka tako, da igralec najprej pokaže na eno škatlo, nato pa vodja igre odpre eno izmed škatel, na katero igralec ni pokazal in v kateri ni nagrade. Nazadnje igralec odpre neko še neodprto škatlo (bodisi tisto, ki jo je sprva pokazal, bodisi katero drugo) in dobi nagrado, če je le-ta notri.

Recimo, da igralec najprej pokaže na prvo škatlo, relevantne pogojne verjetnosti, s katerimi vodja igre odpre drugo, tretjo oz. četrto škatlo, pa so v razmerju 1 : 2 : 3 (če je npr. nagrada v prvi škatli, so te verjetnosti enake  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{3}$  in  $\frac{1}{2}$ , če je nagrada v drugi škatli, pa so enake 0,  $\frac{2}{3}$  in  $\frac{3}{3}$ ).

Recimo, da je vodja igre odprl drugo škatlo. Katero škatlo se igralcu najbolj splača odpreti in kolikšna je pogojna verjetnost, da bo notri nagrada?

2. Slučajni spremenljivki  $X$  in  $Y$  sta neodvisni in porazdeljeni eksponentno  $\text{Exp}(1)$ , t. j. zvezno z gostoto:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Izračunajte korelacijski koeficient  $r(e^{-X}, e^{-X-Y})$ .

3. Statistična spremenljivka  $X$  je porazdeljena diskretno po shemi:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3\theta & 2\theta^2 \\ \frac{1}{1+3\theta+2\theta^2} & \frac{3\theta}{1+3\theta+2\theta^2} & \frac{2\theta^2}{1+3\theta+2\theta^2} \end{pmatrix},$$

kjer je  $\theta > 0$  neznan parameter.

- a) Zapišite to kot enoparametrično eksponentno družino porazdelitev.

*Namig:* pomagajte si s funkcijami  $\rho_i(x) = \begin{cases} 1 & ; x = i \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$

- b) Poiščite nepristransko cenilko za  $1/(1+\theta)$  z enakomerno najmanjšo disperzijo.

4. Statistična spremenljivka  $X$  je porazdeljena normalno  $N(\mu, \sigma)$ , kjer nobenega od parametrov ne poznamo. Opazimo naslednji vzorec:

33·1, 24·9, 30·1, 28·0, 30·1, 26·6, 31·5, 29·8, 33·3, 31·1

(kjer privzamemo, da so vse enote vzorca neodvisne in porazdeljene tako kot  $X$ ). Poiščite interval zaupanja za  $\sigma$  pri stopnji tveganja  $\alpha = 0·05$ .