Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 26. 8. 2011

Matematika – bolonjski univerzitetni študij in pedagoška matematika

1. Označimo z N_i dogodek, da je v i-ti škatli nagrada, z V_2 pa dogodek, da je vodja igre odprl drugo škatlo. Tedaj velja:

$$\begin{aligned} P(V_2) &= P(N_1)\,P(V_2 \mid N_1) + P(N_3)\,P(V_2 \mid N_3) + P(N_4)\,P(V_2 \mid N_4) = \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \\ &= \frac{3}{16} \end{aligned}$$

in nadalje:

$$\begin{aligned} P(N_1 \mid V_2) &= \frac{P(N_1)\,P(V_2 \mid N_1)}{P(V_2)} = \frac{2}{9}\,, \\ P(N_3 \mid V_2) &= \frac{P(N_1)\,P(V_2 \mid N_1)}{P(V_2)} = \frac{1}{3}\,, \\ P(N_4 \mid V_2) &= \frac{P(N_1)\,P(V_2 \mid N_1)}{P(V_2)} = \frac{4}{9}\,. \end{aligned}$$

Igralcu se torej najbolj splača odpreti četrto škatlo. Nagrada je notri s pogojno verjetnostjo 4/9.

2. Velja:

$$E\big(e^{-X}\big) = \int_0^\infty e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,, \quad E\Big[\big(e^{-X}\big)^2\Big] = \int_0^\infty e^{-3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,, \quad D\big(e^{-X}\big) = \frac{1}{12}$$

in nadalje:

$$\begin{aligned} E\big(e^{-X-Y}\big) &= \int_0^\infty e^{-2x}\,\mathrm{d}x \int_0^\infty e^{-2y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\,, \\ E\Big[\big(e^{-X-Y}\big)^2\Big] &= \int_0^\infty e^{-2x}\,\mathrm{d}x \int_0^\infty e^{-2y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{9}\,, \\ D\big(e^{-X}\big) &= \frac{7}{144}\,. \end{aligned}$$

Končno je:

$$\begin{gathered} E\big(e^{-X}e^{-X-Y}\big) = \int_0^\infty e^{-3x}\,\mathrm{d}x \int_0^\infty e^{-2y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{6}\,, \\ K\big(e^{-X}, e^{-X-Y}\big) = \frac{1}{24}\,, \quad r\big(e^{-X}, e^{-X-Y}\big) = \sqrt{\frac{3}{7}} \doteq 0{\dot{}}655. \end{gathered}$$

3. a) Iz zapisa:

$$f_X(x) = \frac{\rho_0(x) + 3\,\rho_1(x) + 2\,\rho_2(x)}{1 + 3\theta + 2\theta^2}\, e^{x \ln \theta}$$

takoj razberemo, da gre za eksponentno družino s pripadajočo zadostno statistiko X.
b) Cenilka $h(X)$ bo nepristranska natanko tedaj, ko bo za vsak θ veljalo:

$$E\big[h(X)\big] = \frac{h(0) + 3\,h(1)\,\theta + 2\,h(2)\,\theta^2}{1 + 3\theta + 2\theta^2} = \frac{1}{1+\theta}\,,$$

kar je ekvivalentno:

$$h(0) + 3\,h(1)\,\theta + 2\,h(2)\,\theta^2 = 1 + 2\theta\,.$$

Cenilka bo torej nepristranska natanko tedaj, ko bo $h(0) = 1$, $h(1) = 2/3$ in $h(2) = 0$. Ker se deterministično izraža z X, ima tudi najmanjšo možno disperzijo.

4. Vzorčno povprečje: $\bar{X} = 29\dot{}85$.
Popravljeni vzorčni standardni odklon: $S_{\mathrm{p}} \doteq 2\dot{}695$.
Kvantila porazdelitve hi kvadrat pri $df = 9$: $\chi^2_{0.025} \doteq 2\dot{}700$, $\chi^2_{0.975} \doteq 19\dot{}02$.
Interval zaupanja (ustrezno zaokrožen): $1\dot{}85 < \sigma < 4\dot{}92$.