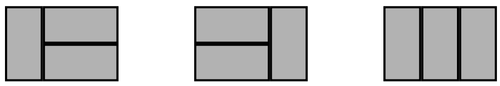
Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 20. 8. 2012

Matematika – univerzitetni študij

1. a) Sprejeta je lahko ena, dve ali pa tri palice. Tri palice so lahko sprejete, če padejo na enega od naslednjih treh načinov:



Verjetnost tega dogodka je $\dfrac{3 \cdot 3!}{7^3} = \dfrac{18}{343}$.
Oglejmo si zdaj dogodek, da je sprejeta natanko ena palica. Očitno je to prva palica, ki pade, drugi dve pa morata pasti tako, da se z njo prekrivata. Če pade palica vodoravno (4 možnosti), se lahko naslednja z njo prekriva na 4 načine. Če palica pade navpično ob strani (2 možnosti), se lahko naslednja z njo prekriva na 3 načine, če pa pade navpično na sredino (1 možnost), pa se lahko naslednja z njo prekriva na 5 načinov. Torej je verjetnost, da je sprejeta ena sama palica, enaka:

$$\frac{4 \cdot 4^2 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 5^2}{7^3} = \frac{107}{343}\,.$$

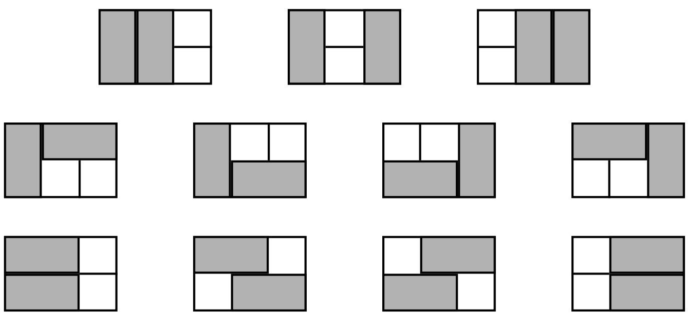
Verjetnost, da sta sprejeti dve palici, je enaka $1 - \dfrac{18}{343} - \dfrac{107}{343} = \dfrac{218}{343}$. Če torej z X označimo število sprejetih palic, velja:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{107}{343} & \frac{218}{343} & \frac{18}{343} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{\cdot}312 & 0{\cdot}636 & 0{\cdot}052 \end{pmatrix}.$$

b) Označimo z A_1, A_2 in A_3 dogodke, da je bila prva, druga oz. tretja palica sprejeta. Izračunati moramo:

$$P(A_1 \cap A_2 \mid X = 2) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c)}{P(X = 2)} = \frac{P(A_1 \cap A_2) - P(X = 3)}{P(X = 2)}\,.$$

Dogodek $A_1 \cap A_2$ se lahko zgodi na naslednjih 11 načinov:



in ima verjetnost $\dfrac{11 \cdot 2!}{49} = \dfrac{22}{49}$. Sledi:

$$P(A_1 \cap A_2 \mid X = 2) = \frac{\frac{22}{49} - \frac{18}{343}}{\frac{218}{343}} = \frac{34}{53} \doteq 0{\cdot}642\,.$$

2. Nalogo najlažje rešimo s pomočjo rodovnih funkcij: če je G_1 rodovna funkcija slučajnih spremenljivk X_i, G_2 pa rodovna funkcija slučajne spremenljivke $2N$, je rodovna funkcija iskane vsote S kompozitum $G_2 \circ G_1$. Ker so slučajne spremenljivke X_i porazdeljene geometrijsko, je:

$$G_1(s) = \frac{\frac{2}{3}s}{1 - \frac{1}{3}s} = \frac{2s}{3-s}\,,$$

rodovna funkcija slučajne spremenljivke N pa je funkcija:

$$s \mapsto \frac{\frac{3}{4}s}{1 - \frac{1}{4}s} = \frac{3s}{4-s}\,,$$

torej je $G_2(s) = \dfrac{3s^2}{4-s^2}$. Rodovna funkcija slučajne vsote S je tako funkcija:

$$s \mapsto \frac{3\left(\frac{2s}{3-s}\right)^2}{4 - \left(\frac{2s}{3-s}\right)^2} = \frac{s^2}{3-2s} = \frac{\frac{1}{3}s^2}{1 - \frac{2}{3}s}\,,$$

torej ima S geometrijsko porazdelitev $\mathrm{Geom}(1/3)$, pomaknjeno za 1 v desno. Z drugimi besedami, $S - 1 \sim \mathrm{Geom}(1/3)$.

3. Iz zapisa gostote:

$$f(x) = \frac{1}{x\,\mathrm{B}(a, 1-a)} \exp\left(a \ln \frac{x}{1-x}\right)$$

(za $0 < x < 1$) razberemo, da gre za eksponentno družino, katere parametrični prostor je odprta množica $(0, 1)$ (za vse a iz te množice ima porazdelitev smisel). Nepristranska cenilka z najmanjšo možno disperzijo bo torej vsaka funkcija pripadajoče zadostne statistike $\ln \frac{X}{1-X}$, ki bo nepristranska cenilka za a^2. Ker je funkcija $x \mapsto \ln \frac{x}{1-x}$ strogo naraščajoča, je dovolj iskati kar funkcije opažanja X. Iz:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{\mathrm{B}(a,1-a)} \int_0^1 x^a (1-x)^{-a}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{B}(a+1, 1-a)}{\mathrm{B}(a, 1-a)} = \\
&= \frac{\Gamma(a+1)\,\Gamma(1-a)}{\Gamma(2)} \, \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = a\,, \\
E(X^2) &= \frac{1}{\mathrm{B}(a,1-a)} \int_0^1 x^{a+1} (1-x)^{-a}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{B}(a+2, 1-a)}{\mathrm{B}(a, 1-a)} = \\
&= \frac{\Gamma(a+2)\,\Gamma(1-a)}{\Gamma(3)} \, \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)} = \frac{\Gamma(a+2)}{2\,\Gamma(a)} = \frac{a(a+1)}{2}
\end{aligned}$$

sledi, da je iskana cenilka $2X^2 - X$.

4. $\bar{X} = 88\dot{}3, \quad S_{\mathrm{p}} \doteq 18\dot{}54, \quad t_{0.995}(9) \doteq 3\dot{}25.$
Interval zaupanja: $69\dot{}2 < X < 107\dot{}4$ (spodnja meja je zaokrožena navzdol, zgornja pa navzgor).