Izpit iz verjetnosti in statistike

Matematika – univerzitetni študij
23. avgust 2013

1. V košari za perilo je $2n$ nogavic, od tega $2k$ karirastih. Nogavice na slepo in brez vračanja jemljemo iz košare. Slučajna spremenljivka N naj označuje število nogavic, ki jih moramo izvleči iz košare, da dobimo prvi par karirastih nogavic.

   a) Zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke N.

   b) Za $n = 4$ in $k = 2$ izračunajte $E(N)$ in $D(N)$.

2. Naj bodo $X_1, \ldots X_{100}, Y_1, \ldots Y_{100}$ neodvisne slučajne spremenljivke, za katere velja:

$$E(X_i) = 1\,, \quad E(Y_i) = 3\,, \quad D(X_i) = 8\,, \quad D(Y_i) = 1\,.$$

   Naj bo $S = X_1Y_1 + X_2Y_2 + \cdots + X_{100}Y_{100}$. Približno izračunajte $P(S < 240)$.

3. Denimo, da smo iz velike populacije vzeli enostaven slučajni vzorec, ki zajema enako število žensk in moških, in za telesno višino dobili naslednje podatke:

	Ženske	Moški
Aritmetična sredina	162˙01	171˙32
Popravljeni standardni odklon	39˙75	32˙94

   Najmanj kako velik bi moral biti vzorec, da bi na njegovi podlagi pri stopnji značilnosti $\alpha = 0˙01$ zavrnili ničelno hipotezo, da so ženske in moški enako visoki, in sprejeli alternativno hipotezo, da so moški višji od žensk? Seveda privzamemo normalno porazdelitev na populaciji.

4. Naj bo N slučajna spremenljivka, ki ima Poissonovo porazdelitev s pričakovano vrednostjo λ. Pogojno na N je v ravnini N točk, ki so neodvisne in porazdeljene standardno dvorazsežno normalno, t. j. zvezno z gostoto:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-(x^2+y^2)/2}$$

   (pravimo, da točke tvorijo *Poissonov točkovni proces* z gostoto intenzivnosti $\lambda\, e^{-(x^2+y^2)/2}/(2\pi)$). Izračunajte porazdelitev razdalje od izhodišča do najbližje točke. *Namig*: kumulativna porazdelitvena funkcija.

4P. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena enakomerno na intervalu od -1 do 2. Določite gostoto porazdelitve slučajne spremenljivke $Y = X^2$.