Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 1. 2. 2012

Matematika – bolonjski univerzitetni študij in pedagoška matematika

1. Označimo z A_n dogodek, da Petrček n-tič zasitnari in pri tem uspe, z N_n pa dogodek, da n-tič zasitnari in pri tem ne uspe (t. j. da še po n-tem sitnarjenju ni dobil avtomobilčka). Naj bo še N_0 gotovi dogodek. Tedaj je:

$$P\big(A_n \mid N_{n-1}\big) = \frac{2^{-n-2}}{1 + 2^{-n-1}}\,, \qquad P\big(N_n \mid N_{n-1}\big) = 1 - \frac{2^{-n-2}}{1 + 2^{-n-1}} = \frac{1 + 2^{-n-2}}{1 + 2^{-n-1}}$$

(dogodka A_n in N_n za $n > 1$ nista nasprotna, sta pa *pogojno nasprotna* glede na N_{n-1}, t. j. $A_n = N_{n-1} \setminus N_n$). Velja tudi $N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \cdots$. Sledi:

$$P(N_n) = P(N_0)\,P(N_1 \mid N_0)\,P(N_2 \mid N_1) \cdots P(N_n \mid N_{n-1}) = \frac{1 + 2^{-n-2}}{1 + 2^{-2}} = $$
$$= \frac{4}{5}\big(1 + 2^{-n-2}\big)\,.$$

Dogodek, da Petrček dobi avtomobilček, lahko izrazimo kot:

$$A := A_1 \cup A_2 \cup \cdots = (N_1 \cap N_2 \cap \cdots)^{\mathrm{c}}$$

in njegova verjetnost je enaka:

$$1 - \lim_{n\to\infty} P(N_n) = \frac{1}{5}\,.$$

Označimo še z M dogodek, da Petrček dobi avtomobilček pri mami. Velja:

$$M = A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup \cdots$$

Dogodki $A_1, A_2, A_3, \ldots$ so nezdružljivi in velja:

$$P(A_n) = P(N_{n-1}) - P(N_n) = \frac{2^{-n}}{5}\,,$$

torej je:

$$P(M) = \frac{1}{5}\big(2^{-1} + 2^{-3} + \cdots\big) = \frac{2}{15}\,,$$

iskana pogojna verjetnost pa je enaka:

$$P(M \mid A) = \frac{P(M)}{P(A)} = \frac{2}{3}\,.$$

2. *Prvi način*: zapišemo vrednosti slučajne spremenljivke S za vse možne izide. To lahko naredimo recimo tako, da izberemo nekega moškega in gledamo, kako glede na njega sedita ostala dva moška. Dobimo:

Izid	S
MMMŽŽŽ	4
MMŽMŽŽ	4
MMŽŽMŽ	4
MMŽŽŽM	4
MŽMMŽŽ	4
MŽMŽMŽ	0
MŽMŽŽM	4
MŽŽMMŽ	4
MŽŽMŽM	4
MŽŽŽMM	4

Torej je $S \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1/10 & 9/10 \end{pmatrix}$, od koder dobimo $E(S) = \dfrac{18}{5}$ in $D(S) = \dfrac{36}{25}$.
Drugi način: slučajno spremenljivko S zapišemo kot vsoto. Za i-ti sedež definiramo slučajno spremenljivko:

$$X_i = \begin{cases} 1 & ; \text{na sedežih, ki sta sosedna } i\text{-temu, sedita osebi nasprotnega spola} \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Velja $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$ in iz:

$$\begin{aligned} E(X_i) = p_0 :=& \\ &:= P(\text{na sedežih, ki sta sosedna } i\text{-temu, sedita osebi nasprotnega spola}) = \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

dobimo $E(S) = \dfrac{18}{5} \doteq 3\dot{}6$. Izračunajmo še disperzijo: $D(S) = E(S^2) - \big(E(S)\big)^2$.
Velja:

$$E(S^2) = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} E(X_i X_j) = 6(p_0 + 2p_1 + 2p_2 + p_3)$$

kjer je p_k verjetnost, da za sedeža, oddaljena za k (t. j. med njima je $k-1$ sedežev) velja, da na sosednih sedežih sedita osebi nasprotnega spola. Verjetnost p_0 smo že izračunali, velja pa še:

$$p_1 = \frac{2}{5}, \qquad p_2 = \frac{3}{10}, \qquad p_3 = \frac{2}{5},$$

torej je:

$$D(S) = 6(p_0 + 2p_1 + 2p_2 + p_3) - (6p_0)^2 = \frac{36}{25}.$$

3. Iz $E(X_i) = 0$ in $D(X) = a^2$ ter posledično $E(S) = 0$ in $D(S) = 500a^2$ ter še centralnega limitnega izreka dobimo:

$$P(S > 1000) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{1000}{a\sqrt{500}}\right),$$

torej mora biti:

$$\frac{1000}{a\sqrt{500}} \approx \Phi^{-1}(0\text{˙}45) \doteq 1\text{˙}645$$

oziroma $a \approx \dfrac{1000}{\Phi^{-1}(0.45)\sqrt{500}} \doteq 27\text{˙}2$.

V resnici je $P(S > 1000) < 0\text{˙}05$, če je $a \le 1000/37 \doteq 27\text{˙}03$, in $P(S > 1000) > 0\text{˙}05$, če je $a > 1000/37$.

4. a) Iz porazdelitvene gostote:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

je jasno, da gre za eksponentno družino s pripadajočo zadostno statistiko X^2. Nepristranska cenilka z najmanjšo možno disperzijo mora biti torej funkcija statistike X^2. Ker je $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, je smiselno domnevati, da bo iskana cenilka podobna statistiki $\sqrt{X^2} = |X|$. Iz:

$$E(|X|) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, e^{-x^2/(2\sigma^2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma$$

sledi, da je iskana cenilka enaka $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,|X|$.