

Izpit iz verjetnosti in statistike

Matematika – univerzitetni študij

5. februar 2014

1. Iz trikotnika z oglišči $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ in $C(0, 1)$ na slepo izberemo točko. Naj bo M večja od njenih koordinat. Dokažite, da je slučajna spremenljivka M porazdeljena zvezno, in zapišite njeno gostoto.
2. Slučajne spremenljivke X_1, X_2, \dots, X_{100} naj bodo porazdeljene diskretno po shemi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ p & 1 - 2p & p \end{pmatrix}.$$

Čim natančneje določite p , pri katerem je $P(X_1 + X_2 + \dots + X_{100} < 280) = 0.1$.

3. Naj bo $0 < a < 1$. Statistična spremenljivka ima porazdelitev $\text{Beta}(a, 1 - a)$, t. j. porazdelitev z gostoto:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi a)}{\pi} x^{a-1} (1-x)^{-a} & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}.$$

Opazimo vzorec neodvisnih opažanj X_1, X_2, \dots, X_n . Poiščite cenilko za a po metodi največjega verjetja.

4. Dana je slučajna permutacija števil $1, 2, \dots, n$, kjer so vse permutacije enako verjetne. Naj bo A_i dogodek, da so vsa števila, manjša od i , v zapisu permutacije pred i .
 - a) Izračunajte verjetnosti dogodkov A_i .
 - b) Dokažite, da sta za poljubna različna i in j dogodka A_i in A_j neodvisna.

Namig: zamislite si, da se permutacija primerno generira po korakih.

4P. Dobro premešamo kup 16 kart, med katerimi so štiri asi in štiri kralji.

- a) Kolikšna je verjetnost, da je med prvimi tremi kartami vsaj en as?
- b) Recimo, da je med prvimi tremi kartami vsaj en as. Kolikšna je pogojna verjetnost, da sta obe preostali karti kralja?

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!