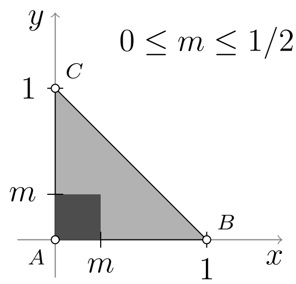
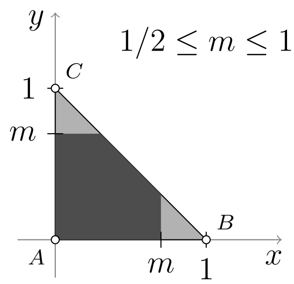
Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 6. 2. 2014

Matematika – univerzitetni študij

1. Izračunajmo najprej kumulativno porazdelitveno funkcijo $F_M(m) = P(M <)$. Očitno za $m \leq 0$ velja $F_M(m) = 0$, za $m \geq 1$ pa $F_M(m) = 1$. Za $0 \leq m \leq 1$ pa lahko dogodek $\{M < m\}$ ponazorimo z naslednjima dvema slikama:





Iz razmerja ploščin končno dobimo celotno kumulativno porazdelitveno funkcijo:

$$F_M(m) = \begin{cases} 0 & ;\ m \leq 0 \\ 2m^2 & ;\ 0 \leq m \leq 1/2 \\ 4m - 2m^2 - 1 & ;\ 1/2 \leq m \leq 1 \\ 1 & ;\ m \geq 1 \end{cases} .$$

Ker je ta funkcija zvezno odvedljiva, je porazdelitev zvezna in ima gostoto:

$$f_M(m) = F_M'(m) = \begin{cases} 0 & ;\ m \leq 0 \\ 4m & ;\ 0 \leq m \leq 1/2 \\ 4(1-m) & ;\ 1/2 \leq m \leq 1 \\ 0 & ;\ m \leq 1 \end{cases} .$$

2. Uporabimo centralni limitni izrek, torej moramo najprej izračunati matematično upanje in disperzijo. Označimo $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$. Velja $E(X_i) = 3$ in $D(X_i) = 8p$, torej $E(S) = 300$ in $D(S) = 800p$. Opazimo še, da S zavzame vrednosti v mreži sodih števil (ki se ne da še bolj razredčiti). Zato je smiselno aproksimirati:

$$P(S < 280) = P(S < 279) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{21}{\sqrt{800p}}\right) .$$

Torej mora biti $\Phi\left(\frac{21}{\sqrt{800p}}\right) \approx 0{\dot{}}4$ oziroma $\frac{21}{\sqrt{800p}} \approx 1{\dot{}}28$ oziroma $p \approx 0{\dot{}}34$.
Točen rezultat: $0{\dot{}}33548$.

3. Logaritem verjetja:

$$\ln L = n \ln \sin(\pi a) - n \ln \pi + (a-1) \sum_{i=1}^{n} \ln X_i - a \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - X_i)$$

ima odvod:

$$\frac{\mathrm{d} \ln L}{\mathrm{d}a} = n\pi \operatorname{ctg}(\pi a) + \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{X_i}{1 - X_i}$$

in je maksimalen pri:

$$\hat{a} = \frac{1}{\pi} \left[\pi - \operatorname{arcctg} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{X_i}{1 - X_i} \right) \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{X_i}{1 - X_i}$$

(upoštevamo, da je $0 < a < 1$, in vzamemo temu primerno vejo arkus kotangensa).

4. a) Zamislimo si, da se permutacija generira takole: najprej postavimo število 1. Nato postavimo število 2 – pred ali za 1, oboje z enako verjetnostjo. Nato postavimo število 3 na tri možne položaje glede na 1 in 2 – vse tri z enako pogojno verjetnostjo. Tako nadaljujemo. Tedaj je A_i dogodek, da smo število i postavili na zadnje mesto med že postavljenimi števili $1, 2, \ldots i-1$. Verjetnost tega dogodka je $1/i$.

b) Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $i < j$. V točki a) smo izračunali, da ima dogodek A_j verjetnost $1/j$. A pri opisanem generiranju permutacije to ni le brezpogojna verjetnost, temveč tudi pogojna verjetnost glede na razvrstitev vseh števil $1, 2, \ldots j-1$: glede na vsako razvrstitev teh števil je ta verjetnost enaka. To pa pomeni, da je to tudi pogojna verjetnost glede na vsak dogodek, ki se deterministično izraža z razvrstitvijo števil $1, 2, \ldots j-1$. Tak je tudi dogodek A_i, torej je $P(A_j \mid A_i) = 1/j = P(A_j)$, kar pomeni, da sta A_i in A_j res neodvisna.

4P. a) $1 - \dfrac{\binom{12}{3}}{\binom{16}{3}} = \dfrac{17}{28} \doteq 0{\cdot}607.$

b) Presek dogodka, da je med prvimi tremi kartami vsaj en as, in dogodka, da sta obe preostali karti kralja, je dogodek, da sta med prvimi tremi kartami dva kralja in en as. Njegova verjetnost je $\dfrac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}}{\binom{16}{3}} = \dfrac{3}{70}$. Iskana pogojna verjetnost pa je:

$$\frac{\frac{3}{70}}{\frac{17}{28}} = \frac{6}{85} \doteq 0{\cdot}0706\,.$$