Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 24. 1. 2013

Matematika – univerzitetni študij

1. Označimo z N_i, C_i, R_i in K_i dogodke, da bo navadni, čokoladni, rdeči oz. karamelni krof pošel kot i-ti. Nadalje naj bo še A dogodek, da je čokoladni krof pošel pred karamelnim. Tedaj velja:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(C_1) + P(N_1 \cap C_2) + P(R_1 \cap C_2) + \\ &\qquad + P(N_1 \cap R_2 \cap C_3) + P(R_1 \cap N_2 \cap C_3) = \\ &= \frac{3}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{8} + \frac{4}{10} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{4} = \\ &= \frac{3}{4} = 0{\cdot}75. \end{aligned}$$

Nadalje velja:

$$P(C_2 \cap A) = P(N_1 \cap C_2) + P(R_1 \cap C_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{8} = \frac{11}{40}\,.$$

Sledi:

$$P(C_2 \mid A) = \frac{P(C_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{11}{30} \doteq 0{\cdot}367\,.$$

2. Slučajna spremenljivka $W = X + Y + 1$ je porazdeljena normalno $\mathrm{N}\big(1, \sqrt{2}\big)$, torej ima gostoto:

$$f_W(w) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, e^{-(w-1)^2/4}\,.$$

Slučajna spremenljivka $Z = W^2$ pa ima za $z > 0$ gostoto:

$$f_Z(z) = \frac{f_W\big(\sqrt{z}\big) + f_W\big(-\sqrt{z}\big)}{2\sqrt{z}} = \frac{e^{-(\sqrt{z}-1)^2/4} + e^{-(-\sqrt{z}-1)^2/4}}{4\sqrt{2\pi z}}\,.$$

Sklep:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(\sqrt{z}-1)^2/4} + e^{-(\sqrt{z}+1)^2/4}}{4\sqrt{2\pi z}} & ;\ z > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}\,.$$

3. Iz:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = c(\lambda) \int_0^{\infty} x\, e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = c(\lambda)\, \frac{\lambda + 1}{\lambda^2}\, e^{-\lambda}$$

dobimo $c(\lambda) = \dfrac{\lambda^2 e^{\lambda}}{\lambda + 1}$. Logaritem verjetja je torej enak:

$$\ln L = n\big(\lambda + 2\ln\lambda - \ln(\lambda+1)\big) + \ln X_1 + \cdots + \ln X_n - \lambda(X_1 + \cdots + X_n)\,.$$

Po odvajanju dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\lambda} = n\left(1 + \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda+1}\right) - \lambda(X_1 + \cdots + X_n)\,.$$

Cenilka po metodi največjega verjetja je tisti λ, za katerega je zgornji izraz enak nič. Po krajšem računu in upoštevanju pogoja, da je $\lambda > 0$, dobimo cenilko:

$$\hat{\lambda} = \frac{-\bar{X} + 2 + \sqrt{\bar{X}^2 + 4\bar{X} - 4}}{2(\bar{X} - 1)}\,,$$

kjer kot ponavadi označimo $\bar{X} = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$.

4. Za mejo $a_{\max}$ lahko brez škode za splošnost postavimo funkcijo minimalne zadostne statistike. Iz gostote porazdelitve je razvidno, da gre za eksponentno družino z minimalno zadostno statistiko $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Iz centralnega limitnega izreka pa sledi, da je le-ta porazdeljena približno normalno $\mathrm{N}\big(n\mu, \sqrt{n}\,\sigma\big)$, kjer je:

$$\mu = E(X_i) = a\,, \qquad \sigma = \sqrt{D(X_i)} = a\sqrt{3}/2\,.$$

Postavimo torej $a_{\max} := h(S_n)$ in poskusimo, ali konstrukcija intervala zaupanja deluje, če je h strogo naraščajoča funkcija. Tedaj je namreč:

$$P\big(a \in [0, a_{\max}]\big) = P\big(a \le h(S_n)\big) = P\big(S_n \ge h^{-1}(a)\big) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{h^{-1}(a) - na}{a\sqrt{3n}/2}\right)\,.$$

Desna stran bo enaka $\beta = 0{\cdot}95$, če bo:

$$\frac{h^{-1}(a) - na}{a\sqrt{3n}/2} = -z\,,$$

kjer je $z := \Phi^{-1}\big((1+\beta)/2\big) \doteq 1{\cdot}645$. Sledi:

$$h^{-1}(a) = \left(n - z\frac{\sqrt{3n}}{2}\right)a$$

oziroma:

$$h(s) = \frac{s}{n - z\sqrt{3n}/2}\,.$$

Za velike n je to dobro definirana strogo naraščajoča funkcija, torej lahko postavimo:

$$a_{\max} = \frac{S_n}{n - z\sqrt{3n}/2}\,.$$

Za funkcijo h pa ne bi mogli vzeti strogo padajoče funkcije. V tem primeru bi namreč veljalo:

$$P\big(a \in [0, a_{\max}]\big) = P\big(a \le h(S_n)\big) = P\big(S_n \le h^{-1}(a)\big) \approx \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{h^{-1}(a) - na}{a\sqrt{3n}/2}\right)$$

in desna stran bi bila enaka β za

$$\frac{h^{-1}(a) - na}{a\sqrt{3n}/2} = z\,,$$

od koder bi sledilo $h^{-1}(a) = \big(n + z\sqrt{3n}/2\big)a$ oziroma $h(s) = s/\big(n + z\sqrt{3n}/2\big)$. Ta funkcija pa je spet strogo naraščajoča, kar je v protislovju s prvotno zahtevo.