

Izpit iz verjetnosti in statistike

Matematika – UNI-BOL

23. junij 2010

1. Tone ima dogovor s krovci, da mu 4. junija naredijo nadstrešek za avto. Toda obrtniki z določeno verjetnostjo zamujajo, in sicer je verjetnost, da mu nadstrešek naredijo k -tega junija, enaka 2^{3-k} , $k = 4, 5, 6, \dots$ (datumi po 30. juniju imajo tako majhne verjetnosti, da jih lahko zanemarimo).

Od vključno 1. junija dalje vsak dan klesti uničujoča toča z verjetnostjo $1/10$, neodvisno od ostalih dni in obrtnikov. Do vključno dneva, ko je nadstrešek narejen, taka toča, če se pojavi, Tonetu obtolče avto. Privzamemo, da sta toča in zamuda obrtnikov neodvisni.

- a) Kolikšna je verjetnost, da Tonetu toča obtolče avto?
b) Recimo, da je toča Tonetu obtolkla avto. Kolikšna je pogojna verjetnost, da so obrtniki zamudili z nadstreškom?

2. Naj bodo X, Y in Z neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene enakomerno na intervalu $[-1, 1]$. Izračunajte $E[\operatorname{sgn}(X - Y) \operatorname{sgn}(X - Z)]$, kjer je, kot običajno:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases} .$$

3. Statistične spremenljivke X_1, X_2, \dots, X_n so neodvisne in porazdeljene zvezno z gostoto:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha/e}} x^{\alpha x} (1 + \ln x) & ; \frac{1}{e} < x < 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} ,$$

kjer je $\alpha > 0$. Poiščite minimalno zadostno statistiko.

4. Tine je zgeneriral 100 slučajnih števil, ki so neodvisna in porazdeljena normalno $N(0, 1)$, Tone pa je zgeneriral 10.000 takih števil. Oba povesta povprečje števil, ki sta jih dobila.

- a) Zapišite porazdelitev Tinetovega in Tonetovega povprečja.
b) Zapomnimo si enega izmed povprečij, ne pa tudi, čigavo je. Konstruirajte najmočnejši test, ki na podlagi tega opažanja pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testira ničelno hipotezo, da je opaženo povprečje Tonetovo, proti alternativni hipotezi, da je Tinetovo. Kolikšna je njegova moč?