Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 23. 6. 2010

Matematika – UNI-BOL

1. a) Označimo z A dogodek, da Tonetu toča obtolče avto, in s T_k dogodek, da toča prvič tolče k-tega junija. Tedaj velja:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A \cap T_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T_k)\, P(A \mid T_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{10} \cdot P(A \mid T_k)\,.$$

Za $k = 1, 2, 3, 4$ je $P(A \mid T_k) = 1$, za $k > 4$ pa se $P(A \mid T_k)$ ujema z verjetnostjo dogodka, da krovci nadstreška niso končali prek k-tim junijem, le-ta pa je enaka $\sum_{r=k}^{\infty} 2^{3-r} = 2^{4-k}$. Torej je:

$$\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{10} + \sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{10} \cdot 2^{4-k} = \\
&= 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \frac{1}{11} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4 = \\
&= 1 - \frac{10}{11} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4 = \\
&= \frac{4439}{11000} \doteq 0{\cdot}404\,.
\end{aligned}$$

b) Označimo z Z dogodek, da krovci zamudijo. Velja:

$$P(Z \mid A) = \frac{P(Z \cap A)}{P(A)}\,,$$

$$P(Z \cap A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T_k \cap A \cap Z) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A \cap T_k)\, P(Z \mid A \cap T_k)\,.$$

Za $k = 1, 2, 3, 4$ je dogodek Z neodvisen od dogodka $A \cap T_k$, torej je $P(Z \mid A \cap T_k) = P(Z) = 1/2$. Za $k > 4$ pa je $P(Z \mid A \cap T_k) = 1$. Sledi:

$$\begin{aligned}
P(Z \cap A) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{10} + \sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{10} \cdot 2^{4-k} = \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^4\right] + \frac{1}{11} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4 = \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{9}{11} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4\right] = \\
&= \frac{50951}{220000}
\end{aligned}$$

in od tod končno:

$$P(Z \mid A) = \frac{50951}{220000} \Bigg/ \frac{4439}{11000} = \frac{50951}{88780} \doteq 0{\cdot}574\,.$$

2. Najprej opazimo, da je:

$$\begin{aligned} E\big[\operatorname{sgn}(X-Y)\operatorname{sgn}(X-Z)\big] &= P(X>Y, X>Z) + P(X<Y, X<Z) - \\ &\qquad - P(X>Y, X<Z) - P(X<Y, X>Z) = \\ &= P(Z<Y<X) + P(Y<Z<X) + \\ &\qquad + P(X<Y<Z) + P(X<Z<Y) - \\ &\qquad - P(Y<X<Z) - P(Z<X<Y)\,. \end{aligned}$$

Zaradi simetrije je vseh šest možnih ureditev enako verjetnih in zaradi zveznosti je verjetnost, da sta kateri izmed danih slučajnih spremenljivk enaki, enaka nič. Torej je verjetnost posamezne stroge ureditve enaka $1/6$ in zato:

$$E\big[\operatorname{sgn}(X-Y)\operatorname{sgn}(X-Z)\big] = \frac{1}{3}\,.$$

Opomba. Seveda lahko nalogo rešimo tudi z integrali.

3. Najprej gostoto posamezne spremenljivke zapišemo v obliki, iz katere razberemo, da gre za eksponentno družino: za $1/e < x < 1$ velja:

$$p(x) = (1 + \ln x)\frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha/e}}\, e^{\alpha x \ln x}\,,$$

funkcijo verjetja, t. j. navzkrižno verjetnostno gostoto, pa lahko za $1/e < x_1, \ldots x_n < 1$ zapišemo v obliki:

$$p(x_1)\, p(x_2) \cdots p(x_n) = (1 + \ln x_1) \cdots (1 + \ln x_n) \left(\frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha/e}}\right)^n e^{\alpha(x_1 \ln x_1 + \cdots + x_n \ln x_n)}\,.$$

Ker gre za eksponentno družino, katere parametrični prostor vsebuje odprto množico, je minimalna zadostna statistika enaka:

$$X_1 \ln X_1 + X_2 \ln X_2 + \cdots + X_n \ln X_n\,.$$

4. a) Tinetovo povprečje je porazdeljeno normalno $\mathrm{N}(0, 1/10)$, torej ima gostoto:

$$f_{\mathrm{Ti}}(x) = \frac{10}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-50x^2}$$

Tonetovo povprečje pa je porazdeljeno normalno $\mathrm{N}(0, 1/100)$, torej ima gostoto:

$$f_{\mathrm{To}}(x) = \frac{100}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-5000x^2}\,.$$

Ker sta ničelna in alternativna hipoteza obe enostavni, je test, ki temelji na razmerju verjetij, najmočnejši. Če torej z X označimo opaženo povprečje, ničelno hipotezo torej zavrnemo, če je razmerje:

$$\frac{f_{\mathrm{To}}(X)}{f_{\mathrm{Ti}}(X)} = 10\, e^{-4950X^2}$$

premajhno, to pa je takrat, ko je vrednost $|X|$ prevelika. Če je P_{To} verjetnost pri Tonetovem povprečju, za $c \geq 0$ velja:

$$P_{\mathrm{To}}(|X| \geq c) = 1 - 2\Phi(100c)$$

Vrednost c moramo nastaviti tako, da bo to enako α, torej:

$$c = \frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{100} \doteq 0\text{˙}0196\,.$$

Moč testa pa je:

$$P_{\mathrm{Ti}}(|X| \geq c) = 1 - 2\Phi(10c) \doteq 0\text{˙}845\,.$$