Izpit iz verjetnosti in statistike

Matematika – bolonjski univerzitetni študij in pedagoška matematika
30. junij 2011

1. Miranda je na zabavi spoznala Ferdinanda. V dneh po zabavi čaka na njegov klic. Verjetnost, da jo Ferdinand prvič pokliče k-ti dan po zabavi, je enaka 3^{-k}. Vsak dan, ko Ferdinand Mirande ne pokliče, Miranda spozna novega fanta z verjetnostjo $1/10$; glede tega so dnevi med seboj neodvisni (če na primer Ferdinand Mirando pokliče že prvi dan po zabavi, Miranda pred tem ne spozna novega fanta, če pa jo pokliče drugi dan, Miranda pred tem spozna novega z verjetnostjo $1/10$).

   Recimo, da je Ferdinand poklical Mirando. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je medtem že spoznala novega fanta?

2. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni, pri čemer ima X eksponentno porazdelitev $\mathrm{Exp}(\lambda)$, Y pa porazdelitev $\mathrm{Gama}(2, \lambda)$. Z drugimi besedami, za $x, y > 0$ sta porazdelitveni gostoti enaki:

$$f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}\,, \qquad f_Y(y) = \lambda^2 y\, e^{-\lambda y}\,.$$

   Določite porazdelitveno gostoto slučajne spremenljivke $Z = \dfrac{X}{X+Y}$.

3. Slučajne spremenljivke $X, Y_1, Y_2, \ldots Y_{100}$ so neodvisne, pri čemer je $P(X = 1) = 2/3$, $P(X = 2) = 1/3$, $E(Y_i) = 1$ in $D(Y_i) = 100$. Slučajne spremenljivke $Y_1, \ldots Y_{100}$ so tudi enako porazdeljene. Označimo $S = X(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100})$. Približno izračunajte $P(S > 150)$.

4. Vsak poskus določene vrste uspe z verjetnostjo $p \in (0, 1)$. Poiščite nepristransko cenilko za p^2 z enakomerno najmanjšo disperzijo, ki temelji na izvedbi treh poskusov te vrste.