Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 30. 6. 2011

Matematika – bolonjski univerzitetni študij in pedagoška matematika

1. Označimo z F_k dogodek, da Ferdinand Mirando prvič pokliče k-ti dan po zabavi. Tedaj so dogodki $F_1, F_2, \ldots$ nezdružljivi, njihova unija, ki jo označimo z F, pa je dogodek, da Ferdinand Mirando sploh pokliče. Verjetnost tega dogodka je enaka:

$$P(F) = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} = \frac{1}{2}\,.$$

Označimo še z M dogodek, da Miranda spozna novega fanta, preden jo Ferdinand pokliče (če je ne pokliče, je torej to dogodek, da Miranda sploh spozna novega fanta). Tedaj velja:

$$P(M \mid F_k) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\,,$$

iskana pogojna verjetnost pa je enaka:

$$P(M \mid F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{1}{P(F)} \sum_{k=1}^{\infty} P(F_k)\, P(M \mid F_k) = \frac{1}{21}\,.$$

2. Najprej opazimo, da Z skoraj gotovo zavzame vrednosti na intervalu $[0,1]$ (celo le na $(0,1)$). Iz izražave:

$$X_2 = g(X_1, Z)\,, \quad \text{kjer je} \quad g(x,z) = \frac{x}{z} - x\,, \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x,z) = -\frac{x}{z^2}$$

po krajšem računu sledi, da za $0 < z < 1$ velja:

$$f_Z(z) = \lambda^3\, \frac{1-z}{z^3} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x/z}\, \mathrm{d}x = 2(1-z)\,.$$

Torej lahko zapišemo:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 2(1-z) & ;\ 0 < z < 1 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}\,.$$

3. Centralnega limitnega izreka ne moremo uporabiti neposredno na S, ker produkt slučajne spremenljivke X in normalno porazdeljene slučajne spremenljivke, četudi neodvisne od X, ni nujno normalno porazdeljen. Prav tako centralni limitni izrek ne velja za vsoto $XY_1 + XY_2 + \cdots XY_{100}$, saj so seštevanci odvisni (centralni limitni izrek se sicer da posplošiti tudi na vsote slučajnih spremenljivk z določeno vrsto odvisnosti, vendar pa je odvisnost prej omenjenih seštevancev premočna). Pravilno pa bo iskano verjetnost računati s pomočjo pogojnih verjetnosti glede na X. Če pišemo $T := Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100}$, po izreku o polni verjetnosti velja:

$$P(S > 150) = P(X = 1)\, P(S > 150 \mid X = 1) + P(X = 2)\, P(S > 150 \mid X = 2) = \\ = \frac{2}{3}\, P(T > 150) + \frac{1}{3}\, P(T > 75)\,.$$

Za slučajno spremenljivko T pa centralni limitni izrek velja: iz $E(T) = 100$ in $D(T) = 10000$ dobimo:

$$P(T > a) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{a - 100}{100}\right)\,,$$

torej je:

$$P(S > 150) \approx \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\,\Phi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\,\Phi\left(\frac{1}{4}\right) \doteq 0\text{'}405\,.$$

4. Pripadajoča zadostna statistika je število uspelih poskusov, ki ga označimo z S. Za iskano cenilko $h(S)$ bo torej moralo veljati:

$$E\big[h(S)\big] = p^2\,.$$

Ker je S porazdeljena binomsko $\mathrm{b}(3, p)$, to pomeni:

$$h(0)\,(1 - p)^3 + 3\,h(1)\,p(1 - p)^2 + 3\,h(2)\,p^2(1 - p) + h(3)\,p^3 = p^2$$

za vse $p \in (0, 1)$. S primerjavo koeficientov dobimo, da bo to natanko tedaj, ko bo:

$$h(0) = 0\,, \quad h(1) = 0\,, \quad h(2) = \tfrac{1}{3}\,, \quad h(3) = 1\,.$$

Cenilko lahko posplošimo tudi na primer, ko izvedemo n poskusov. V tem primeru se jo splača iskati kot polinom pripadajoče zadostne statistike S. Iz $E(S) = np$ in $E(S^2) = np + (n^2 - n)p^2$ dobimo $E(S^2 - S) = (n^2 - n)p^2$, torej bo iskana cenilka enaka:

$$\frac{S^2 - S}{n^2 - n}$$

in zlahka se lahko prepričamo, da se za $n = 3$ ujema s prej dobljeno cenilko.