

Izpit iz verjetnosti in statistike

Matematika – univerzitetni študij

18. junij 2012

1. Pustolovec Albert pride v tujo deželo, kjer ga takoj primejo in vtaknejo v ječo. Po prvi noči, prebiti v ječi, ga obišče kralj in mu ponudi posodo, v kateri je ena rdeča in ena zelena kroglica. Albert na slepo izvleče eno kroglico. Če izvleče zeleno, je izpuščen, če izvleče rdečo, pa mora prebiti v ječi še eno noč. Naslednji dan ga spet obišče kralj in spet mu ponudi posodo, le da sta tokrat notri dve rdeči in ena zelena kroglica. Spet je Albert izpuščen, če izvleče zeleno kroglico, sicer pa mora ponovno prespati v ječi. Tako se nadaljuje: vsak dan je v posodi ena rdeča kroglica več.

a) Dokažite, da Albert z verjetnostjo ena nekoč pride iz ječe.

b) Ko Alberta izpustijo, mu kralj izroči posodo s kroglicami (n rdečimi in eno zeleno, če je Albert v ječi prespal n -krat). Albert nato sam takoj izvleče eno kroglico. Če je zelena, takoj zapusti deželo, sicer pa izvlečeno rdečo kroglico odvrže in tam prespi (tokrat na svobodi). Nato spet vleče kroglice (tokrat z eno rdečo manj) in če izvleče zeleno, deželo zapusti, sicer pa ponovno prespi. Tako nadaljuje, vsakič z eno rdečo kroglico manj.

Recimo, da je Albert v tej deželi prespal natanko petkrat. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je v zaporu prespal trikrat?

2. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)\ln 2} & ; x > 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Določite porazdelitev ulomljenega dela te slučajne spremenljivke, t. j. $X - \lfloor X \rfloor$ (primer: ulomljeni del števila 3·9 je 0·9).

3. Statistična spremenljivka X je porazdeljena eksponentno $\text{Exp}(\lambda)$. Poiščite nepristransko cenilko za $1/(\lambda + 1)$ z enakomerno najmanjšo disperzijo, če:

a) imate na voljo eno samo opažanje (namig: glejte e^{-X});

b) imate na voljo dve neodvisni opažanji (namig: določite, funkcija katere statistike mora biti cenilka, in si oglejte porazdelitev te statistike).

4. 100 gospodinjstev v neki deželi povprašamo, koliko avtomobilov imajo. 9 jih ni imelo nobenega, 34 enega, 38 dva, 18 tri, eno gospodinjstvo pa je imelo pet avtomobilov. Določite 95% interval zaupanja za število avtomobilov na gospodinjstvo v tej deželi.