Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 18. 6. 2012

Matematika – univerzitetni študij

1. a) *Prvi način.* Oglejmo si nasprotni dogodek, t. j. da Albert nikoli ne bo izpuščen. Le-ta je presek padajočega zaporedja dogodkov, da bo Albert v ječi prebil več kot n noči. Verjetnosti teh dogodkov so enake:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

torej imajo limito nič, se pravi, da je nič tudi verjetnost dogodka, da Albert nikoli ne bo izpuščen.

Drugi način. Označimo z J_n dogodek, da je Albert v ječi prespal natanko n noči. Velja:

$$P(J_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Dogodek, da Albert nekoč pride iz ječe, je unija dogodkov $J_1, J_2, J_3, \ldots$, ki so nezdružljivi. Njegova verjetnost je enaka:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) = 1.$$

b) Označimo z N_5 dogodek, da je Albert v dani deželi prespal natanko petkrat. Ta dogodek je možen, če je v ječi prespal trikrat, štirikrat ali petkrat. Za $n = 3, 4, 5$ velja:

$$P(N_5 \mid J_n) = \frac{1}{n+1}.$$

Po Bayesovi formuli dobimo:

$$P(J_3 \mid N_5) = \frac{\frac{1}{3\cdot 4} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{3\cdot 4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4\cdot 5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5\cdot 6} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{75}{131} \doteq 0{\cdot}573.$$

2. *Prvi način*: s pomočjo kumulativne porazdelitvene funkcije. Če označimo $Y = X - \lfloor X \rfloor$ in je $0 \le y \le 1$, je $Y \le y$ natanko tedaj, ko je $n \le X \le n + y$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Sledi:

$$F_Y(y) = \sum_{n=1}^{\infty} P(n \le X \le n+y) = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+y} \frac{1}{x(x+1)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+y}{n+y+1} \, \frac{n+1}{n}\right).$$

Iz delne vsote:

$$\sum_{n=1}^{m} \ln\left(\frac{n+y}{n+y+1}\,\frac{n+1}{n}\right) = \ln\frac{(1+m)(1+y)}{1+y+m}$$

po limitiranju dobimo $F_Y(y) = \dfrac{\ln(1+y)}{\ln 2}$. Natančneje, kumulativna porazdelitvena funkcija je enaka:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & ; \; y \le 0 \\ \dfrac{\ln(1+y)}{\ln 2} & ; \; 0 \le y \le 1 \\ 1 & ; \; y \ge 1 \end{cases} .$$

To tudi pomeni, da je slučajna spremenljivka Y zvezna z gostoto:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+y)\ln 2} & ; \; 0 < y < 1 \\ 0 & ; \; \text{sicer} \end{cases} .$$

Drugi način: izračunamo neposredno gostoto. Funkcija $h(x) = x - \lfloor x \rfloor$ je namreč v slučajni točki X z verjetnostjo 1 zvezno odvedljiva, njen odvod pa je enak 1. Sledi:

$$f_Y(y) = \sum_{x;h(x)=y} f_X(x) .$$

Za $0 < y < 1$ to pomeni:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_X(y+n) = \frac{1}{\ln 2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+y)(n+y+1)} = \\ &= \frac{1}{\ln 2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+y)} - \frac{1}{(n+y+1)}\right) . \end{aligned}$$

Iz delne vsote:

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{(n+y)} - \frac{1}{(n+y+1)}\right) = \frac{1}{1+y} - \frac{1}{1+y+m}$$

po limitiranju dobimo $f_Y(y) = 1/(1+y)$, kar je enako kot prej.

3. a) Iz:

$$E\big(e^{-X}\big) = \lambda \int_0^\infty e^{-x}\, e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\lambda+1}$$

dobimo:

$$\frac{1}{\lambda+1} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda+1} = 1 - E\big(e^{-X}\big) = E\big(1 - e^{-X}\big) ,$$

torej je $1 - e^{-X}$ nepristranska cenilka za $1/(\lambda+1)$. Ker gre za eksponentno družino s parametričnim prostorom, ki je odprta množica, ima ta cenilka tudi enakomerno najmanjšo disperzijo.

b) Za eno opažanje X je X tudi statistika, ki pripada ustreznemu zapisu eksponentne družine. Za dve neodvisni opažanji X_1 in X_2 je pripadajoča statistika vsota $X_1 + X_2$, ki ima porazdelitev Gama$(2, \lambda)$, torej zvezno z gostoto:

$$f(x) = \lambda^2 \, x \, e^{-\lambda x} \, .$$

Iz prejšnje izpeljave cenilke dobimo:

$$\frac{1}{\lambda + 1} = \lambda \int_0^\infty \big(1 - e^{-x}\big) e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x \, ,$$

torej je:

$$\frac{\lambda}{\lambda + 1} = \lambda^2 \int_0^\infty \frac{1 - e^{-x}}{x} \, x \, e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x = E\left(\frac{1 - e^{-(X_1 + X_2)}}{X_1 + X_2} \right) \, ,$$

od koder končno dobimo iskano cenilko $1 - \dfrac{1 - e^{-(X_1 + X_2)}}{X_1 + X_2}$.

4. $\bar{X} = 1\text{˙}69$, $\quad S_\mathrm{p} \doteq 0\text{˙}940$, $\quad t_{0.975}(99) \doteq 1\text{˙}98$.
Interval zaupanja: $1\text{˙}50 < X < 1\text{˙}88$ (spodnja meja je zaokrožena navzdol, zgornja pa navzgor).