Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 28. 6. 2013

Matematika – univerzitetni študij

1. Označimo s H_i dogodek, da smo iz vreče vzeli natanko i lešnikov dobavitelja B, Z_2 pa dogodek, da smo dobili natanko dva žarka lešnika. Očitno dogodki H_0, H_1 in H_2 tvorijo popoln sistem dogodkov. Velja:

$$P(H_0) = \frac{\binom{8}{3}\binom{2}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{15}\,, \quad P(H_1) = \frac{\binom{8}{2}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{15}\,, \quad P(H_2) = \frac{\binom{8}{1}\binom{2}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{15}\,,$$

in:

$$\begin{aligned} P(Z_2 \mid H_0) &= 3 \cdot 0\text{'}05^2 \cdot 0\text{'}95 = 0\text{'}007125\,, \\ P(Z_2 \mid H_1) &= 0\text{'}05^2 \cdot 0\text{'}85 + 2 \cdot 0\text{'}05 \cdot 0\text{'}95 \cdot 0\text{'}15 = 0\text{'}016375\,, \\ P(Z_2 \mid H_2) &= 0\text{'}05 \cdot 2 \cdot 0\text{'}15 \cdot 0\text{'}85 + 0\text{'}95 \cdot 0\text{'}15^2 = 0\text{'}034125\,. \end{aligned}$$

Pri točki a) je zahtevana verjetnost enaka:

$$P(Z_2) = \frac{7}{15} \cdot 0\text{'}007125 + \frac{7}{15} \cdot 0\text{'}016375 + \frac{1}{15} \cdot 0\text{'}034125 \doteq 0\text{'}0132\,,$$

pri točki b) pa je enaka:

$$\frac{1}{P(Z_2)} \cdot \frac{1}{15} \cdot 0\text{'}95 \cdot 0\text{'}15^2 \doteq 0\text{'}108\,.$$

2. Uporabimo centralni limitni izrek, za kar pa moramo poznati matematično upanje in disperzijo slučajne spremenljivke S. Velja:

$$\begin{gathered} E(X_iY_i) = E(X_i)\,E(Y_i) = -1\,, \\ E(X_i^2) = D(X_i) + \big(E(X_i)\big)^2 = 5\,, \\ E(Y_i^2) = D(Y_i) + \big(E(Y_i)\big)^2 = 10\,, \\ E(X_i^2Y_i^2) = E(X_i^2)\,E(Y_i^2) = 50\,, \\ D(X_iY_i) = E(X_i^2Y_i^2) - \big(E(X_iY_i)\big)^2 = 49\,, \\ E(S) = -100\,, \qquad D(S) = 4900\,. \end{gathered}$$

Sledi:

$$P(S > 0) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{100}{\sqrt{4900}}\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{10}{7}\right) \doteq 0\text{'}077\,.$$

3. Iz logaritma gostote:

$$\ln f(x) = \frac{3}{2} \ln a - \ln \sqrt{2\pi} + 2 \ln x - a x^2$$

dobimo logaritem verjetja:

$$\ln L = \frac{3n}{2} \ln a - n \ln \sqrt{2\pi} + 2\big(\ln X_1 + \cdots + \ln X_n\big) - a(X_1^2 + \cdots + X_n^2)\,.$$

Opazimo, da gre $\ln L$ pri vsakem naboru opažanj proti minus neskončno, ko gre a bodisi proti nič bodisi proti neskončno. Zato bo maksimum nujno dosežen v stacionarni točki. Velja:

$$\frac{\mathrm{d} \ln L}{\mathrm{d} a} = \frac{3n}{2a} - (X_1^2 + \cdots + X_n^2)\,,$$

kar je enako nič, če je a enak:

$$\hat{a} = \frac{3n}{2(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2)}\,.$$

4. Velja:

$$P(X = k) = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{k-1} \quad ; \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

in:

$$f_{Y|X}(y) = \sqrt{\frac{X}{2\pi}}\, e^{-Xy^2/2}\,.$$

Brezpogojna porazdelitev slučajne spremenljivke Y je torej zvezna z gostoto:

$$\begin{aligned} f_Y(y) = E\big[f_{Y|X}(y)\big] &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{k-1} \sqrt{\frac{k}{2\pi}}\, e^{-ky^2/2} = \\ &= \frac{1}{(a-1)\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \left(\frac{a-1}{a}\, e^{-y^2/2}\right)^k\,. \end{aligned}$$

Vrsta konvergira za vse y in vse $a > 1$, za njeno vsoto pa ne kaže, da bi se dala zapisati v elementarni sklenjeni obliki.

4P. Iz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, \mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \big(c x^{-2} + x^{-4}\big)\, \mathrm{d}x = c + \frac{1}{3}$$

dobimo, da mora biti $c = 2/3$. Kumulativna porazdelitvena funkcija je enaka:

$$F_X(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & ; \; x \le 1 \\ 1 - \dfrac{2}{3x} - \dfrac{1}{3x^3} & ; \; x \ge 1 \end{cases}\,.$$

Za $y < 0$ je očitno $F_Y(y) = 0$. Za $y \geq 0$ velja:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P\big(2 - \sqrt{y} < X < 2 + \sqrt{y}\big) = F_X\big(2 + \sqrt{y}\big) - F_X\big(2 + \sqrt{y}\big)\,.$$

Za $0 \leq y \leq 1$ velja:

$$F_Y(y) = \frac{2}{3\big(2 - \sqrt{y}\big)} + \frac{1}{3\big(2 - \sqrt{y}\big)^3} - \frac{2}{3\big(2 + \sqrt{y}\big)} - \frac{1}{3\big(2 + \sqrt{y}\big)^3}\,,$$

za $y \geq 1$ pa velja:

$$F_Y(y) = 1 - \frac{2}{3\big(2 + \sqrt{y}\big)} - \frac{1}{3\big(2 + \sqrt{y}\big)^3}\,.$$

Od tod sledi, da je porazdelitev slučajne spremenljivke Y zvezna z gostoto:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & ;\ y < 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{y}(2-\sqrt{y})^2} + \frac{1}{2\sqrt{y}(2-\sqrt{y})^4} + \frac{1}{3\sqrt{y}(2+\sqrt{y})^2} + \frac{1}{2\sqrt{y}(2+\sqrt{y})^4} & ;\ 0 < y < 1 \\ \frac{1}{3\sqrt{y}(2+\sqrt{y})^2} + \frac{1}{2\sqrt{y}(2+\sqrt{y})^4} & ;\ y > 1 \end{cases}\,.$$