

Izpit iz verjetnosti in statistike

Matematika – UNI-BOL

20. september 2010

1. Na mizi je n na videz enakih kovancev. Od tega je k poštenih, preostali pa so pristranski, in sicer na vsakem izmed njiju pade grb z verjetnostjo $p \neq 1/2$. Na slepo izberemo dva kovanca in ju vržemo.

- a) Kolikšna je verjetnost, da na enem kovancu pade grb, na drugem pa cifra?
b) Recimo, da res na enem pade grb, na drugem pa cifra. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je kateri izmed vrženih kovancev pristranski?

2. Tone čaka avtobus in nima pojma, kdaj pride. Iz izkušenj pa ve, da je čas čakanja v urah porazdeljen zvezno z gostoto:

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{(1+t)^2} & ; t > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Če Tone ujame avtobus, ima do cilja še eno uro, če gre peš, pa ima do cilja še tri ure. Tone nekaj časa čaka, če do takrat ni avtobusa, pa gre peš. Koliko časa naj čaka, da bo pričakovani čas od začetka čakanja do prihoda na cilj minimalen?

Namig. Označimo z A čas prihoda avtobusa, s t_0 čas, ob katerem se Tone odloči iti peš, če še ni bilo avtobusa, s T pa celoten čas, ki ga Tone porabi za prihod do cilja. Zapišite T kot funkcijo slučajne spremenljivke A .

3. Statistična spremenljivka je porazdeljena enakomerno na intervalu $[0, a]$, na voljo pa imamo n neodvisnih opazanj. Recimo, da se odločimo ocenjevati parameter a na podlagi vzorčnega povprečja \bar{X} .

- a) Poiščite funkcijo g , za katero bo disperzija slučajne spremenljivke $g(\bar{X})$ za velike n približno neodvisna od parametra, matematično upanje pa se bo z njim spreminjalo.
b) Pri $n = 100$ opazimo $\bar{X} = 3$. V kontekstu prej povedanega poiščite 99% interval zaupanja za a .

Komentirajte! *Namig:* CLI, delta metoda.

4. Statistični spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni po Poissonu: $X \sim P(\lambda)$ in $Y \sim P(\mu)$. Opazimo $X = 230$ in $Y = 180$. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ na podlagi razmerja verjetij testirajte hipotezo, da je $\lambda = \mu = 200$, proti alternativni hipotezi, da to ni res. Pomagajte si z aproksimacijo porazdelitve ustrezne statistike s porazdelitvijo hi kvadrat.