Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 20. 9. 2010

Matematika – UNI-BOL

1. a) $$\frac{1}{\binom{n}{2}}\left[\binom{k}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+k(n-k)\left(p\cdot\frac{1}{2}+(1-p)\cdot\frac{1}{2}\right)+\binom{n-k}{2}\cdot 2p(1-p)\right]=$$
$$=\frac{k(k-1)+2k(n-k)p+4(n-k)(n-k-1)p(1-p)}{2n(n-1)}.$$

b) $$\frac{2k(n-k)p+4(n-k)(n-k-1)p(1-p)}{k(k-1)+2k(n-k)p+4(n-k)(n-k-1)p(1-p)}.$$

2. Iz:

$$T=\begin{cases} A+1 & ; A\le t_0 \\ t_0+3 & ; A>t_0 \end{cases}$$

dobimo:

$$E(T)=\int_0^{t_0}\frac{(t+1)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t+(t_0+3)\int_{t_0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}=\ln(1+t_0)+\frac{t_0+3}{1+t_0}.$$

Z odvajanjem dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}\,E(T)}{\mathrm{d}t_0}=\frac{1}{1+t_0}-\frac{2}{(1+t_0)^2},$$

kar je minimalno pri $t_0=1$. Optimalna strategija za Toneta je torej, da se odpravi peš, če po eni uri še ni avtobusa.

3. a) Ker je $E(X)=a/2$ in $D(X)=a^2/12$, bo za velike n po centralnem limitnem izreku približno veljalo $\bar{X}\sim\mathrm{N}\left(\frac{a}{2},\frac{a}{\sqrt{12n}}\right)$. Po delta metodi bo potem za dovolj lepo funkcijo g približno:

$$g(\bar{X})\sim\mathrm{N}\left(g\left(\frac{a}{2}\right),\left|g'\left(\frac{a}{2}\right)\right|\frac{a}{\sqrt{12n}}\right).$$

Približno (asimptotično) enakost $D\big[g(\bar{X})\big]=1$ bomo torej dosegli, če bo veljalo:

$$g'\left(\frac{a}{2}\right)\frac{a}{\sqrt{12n}}=1$$

oziroma:

$$g'(t)=\frac{\sqrt{3n}}{t},$$

torej lahko postavimo $g(t)=\sqrt{3n}\ln t$.

b) Ker je približno $\sqrt{3n}\ln\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\sqrt{3n}\ln\frac{a}{2}, 1\right)$, bo približni interval zaupanja pri stopnji zaupanja β določen z zvezo:

$$\left|\sqrt{3n}\ln\bar{X} - \sqrt{3n}\ln\frac{a}{2}\right| < \Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

oziroma:

$$2\bar{X}\exp\left[-\frac{1}{\sqrt{3n}}\Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right)\right] < a < 2\bar{X}\exp\left[\frac{1}{\sqrt{3n}}\Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right)\right].$$

Ko vstavimo $\bar{X} = 3$ in $\beta = 0{\dot{}}99$, ob ustreznem zaokrožanju dobimo $5{\dot{}}17 < a < 6{\dot{}}97$.

4. Pri modelu, ki ga obravnava naloga, lahko funkcijo verjetja zapišemo v obliki:

$$L(x, y; \lambda, \mu) = \frac{\lambda^x \mu^y e^{-\lambda-\mu}}{x!y!}$$

in maksimum je pri celem modelu dosežen pri $\lambda = x$ in $\mu = y$. Če se omejimo na ničelno hipotezo $\lambda = \mu = 200$, pa je:

$$L(x, y; 200, 200) = \frac{\lambda^x \mu^y e^{-400}}{x!y!}$$

(ker je hipoteza enostavna, ni potrebno iskati maksimuma). Če z Λ označimo razmerje verjetij:

$$\Lambda = \frac{\sup_{\Theta_{H_0}} L(X, Y; \lambda, \mu)}{\sup_{\Theta} L(X, Y; \lambda, \mu)} = \frac{L(X, Y; 200, 200)}{L(X, Y; X, Y)} = \frac{200^{X+Y} e^{-400}}{X^X Y^Y e^{-X-Y}},$$

ima $-2\ln(\Lambda)$ približno porazdelitev hi kvadrat z dvema prostostnima stopnjama. Za naše opažanje dobimo $-2\ln(\Lambda) \doteq 6{\dot{}}36$, kritična vrednost pa je $\chi^2_{0.95} \doteq 5{\dot{}}99$. Hipotezo torej zavrnemo.