Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 5. 9. 2011

Matematika – bolonjski univerzitetni študij in pedagoška matematika

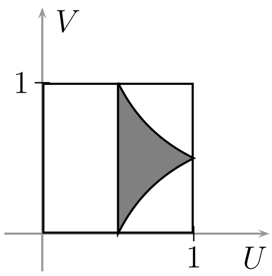
1. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da v drugo prelomimo npr. levi konec palice. Naj bo U dolžina levega konca prvič prelomljene palice, deljena z dolžino celotne palice, V pa naj bo dolžina levega konca drugič prelomljene palice, deljena z dolžino dela palice, ki smo ga drugič lomili (t. j. levega konca prvič prelomljene palice). Tedaj sta slučajni spremenljivki U in V neodvisni in porazdeljeni enakomerno na $(0,1)$, dolžine končnih delov palice pa so si v razmerju $UV : U(1-V) : 1-U$. Trikotnik lahko torej sestavimo, če velja:

$$\begin{aligned} UV &\le U(1-V) + (1-U)\,, \\ U(1-V) &\le UV + (1-U)\,, \\ 1-U &\le UV + U(1-V)\,, \end{aligned}$$

kar je ekvivalentno:

$$U \ge \frac{1}{2}\,, \quad 1 - \frac{1}{2U} \le V \le \frac{1}{2U}\,.$$

Slika:



Verjetnost našega dogodka je enaka:

$$\int_{1/2}^{1} \left[\frac{1}{2u} - \left(1 - \frac{1}{2u}\right)\right] \mathrm{d}u = \int_{1/2}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln 2 - \frac{1}{2} \doteq 0{\cdot}193\,.$$

2. Najprej izračunamo:

$$E(X) = E\big[E(X \mid Y)\big] = E(Y) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1\,.$$

Za disperzijo pa imamo dve možnosti. Lahko najprej izračunamo:

$$E(X^2 \mid Y) = D(X \mid Y) + \big(E(X \mid Y)\big)^2 = Y^2 + Y + 1$$

ter nato:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E\big[E(X^2 \mid Y)\big] = E(Y^2) + E(Y) + 1 = D(Y) + \big(E(Y)\big)^2 + E(Y) + 1 = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}, \\ D(X) &= E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Disperzijo pa lahko izračunamo tudi s pomočjo razbitja na pojasnjeno in nepojasnjeno disperzijo:

$$D(X) = D\big(E(X \mid Y)\big) + E\big(D(X \mid Y)\big) = D(Y) + E(Y+1) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}.$$

3. Iz porazdelitve posameznega opažanja $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ (1-p)/2 & 1/2 & p/2 \end{pmatrix}$ in dejanskih opažanj dobimo opaženo funkcijo verjetja:

$$L = \left(\frac{1-p}{2}\right)^{15} \left(\frac{1}{2}\right)^{55} \left(\frac{p}{2}\right)^{30}.$$

Prikladneje je delati z logaritmom:

$$\ln L = -100 \ln 2 + 15 \ln(1-p) + 30 \ln p.$$

Po odvajanju dobimo:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{30}{p} - \frac{15}{1-p},$$

kar je enako nič pri $p = 2/3$ in to je naša ocena.

4. $\bar{X} = 1{\cdot}449$, $S_{\mathrm{p}} \doteq 1{\cdot}189$, $df = 365$,
$t_{0.995} \doteq 2{\cdot}59$ (pri $df = \infty$ pa pride $2{\cdot}58$, kar je dober približek),
$\Delta \doteq 0{\cdot}161$.

Interval zaupanja (ustrezno zaokrožen): $(1{\cdot}28, 1{\cdot}62)$.