

Izpit iz verjetnosti in statistike

Matematika – bolonjski univerzitetni študij in pedagoška matematika
3. september 2012

1. Strelec Rajko strelja v tarčo, ki ima 10 krogov. Pri vsakem strelu zadene k krogov z verjetnostjo $(11 - k)/66$, kjer je $k = 0, 1, 2, \dots, 10$. Streli so med seboj neodvisni.

Rajko pri prvem strelu zadene 7 krogov, nato strelja v nedogled.

- Kolikšna je verjetnost, da bo pri naslednjem strelu, pri katerem bo zadel več kot 7 krogov, zadel 10 krogov?
- Vsakič, ko zadene več, kot je bilo največje število krogov v vseh prejšnjih streljih, Rajko postavi *osebni rekord*. Prvi strel je izvzet: ne šteje za osebni rekord. Označimo z R število osebnih rekordov, ki jih postavi Rajko. Določite porazdelitev te slučajne spremenljivke.
- Recimo, da je Rajko postavil natanko dva osebna rekorda. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je pri drugem strelu zadel 8 krogov?

2. Slučajna spremenljivka X ima porazdelitev $\text{Gama}(2, 1)$, slučajna spremenljivka U pa ima pogojno na X enakomerno porazdelitev na intervalu $(X, 2X)$. Določite brez-pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke U in izračunajte njeno matematično upanje.

3. Statistična spremenljivka je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$f(x) = \begin{cases} ax^{a-1} & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases},$$

kjer je $a > 0$ neznan parameter.

- Zapišite to kot eksponentno družino porazdelitev.
- Poiščite nepristransko cenilko za $1/(a + 2)$ z najmanjšo možno disperzijo.

4. Statistična spremenljivka X je porazdeljena enakomerno na intervalu $(a, a + 1)$. Dan je vzorec veliko neodvisnih opažanj te statistične spremenljivke. Konstruirajte asimptotični dvostranski 95% interval zaupanja za a , ki bo temeljil na vzorčnem povprečju. Konstrukcijo zapišite kot algoritem, ki sprejme velikost vzorca (n) in vrne interval zaupanja. Algoritem sme uporabljati le osnovne računske operacije, kot so seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje in korenjenje.