# Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 3. 9. 2012

Matematika – univerzitetni študij

**1.** a) Iskana verjetnost je enaka pogojni verjetnosti $P(A \mid B)$, kjer je $A$ dogodek, da Rajko v posameznem strelu zadene 10 krogov, $B$ pa dogodek, da zadene več kot 7 krogov (glej pojasnilo spodaj). Ker je $A \subseteq B$, je:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{66}}{\frac{1}{11}} = \frac{1}{6}\,.$$

**Pojasnilo.** Denimo, da izvajamo zaporedje neodvisnih poskusov in da lahko pri vsakem pride do opažanja $A$, prav tako pa tudi do opažanja $B$. Možne so vse kombinacije ($\bar{A} \cap \bar{B}$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ in $A \cap B$) in vse se pri posameznem poskusu zgodijo s fiksnimi verjetnostmi, ki jih označimo s $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, $P(A \setminus B)$, $P(B \setminus A)$ in $P(A \cap B)$. To so verjetnosti v verjetnostnem prostoru, ki se nanaša na *posamezen* poskus. Privzemimo, da je $P(B) > 0$.
Poleg prej omenjenega pa gledamo še verjetnostni prostor, ki se nanaša na celotno zaporedje poskusov. Namesto $A$ in $B$ imamo na njem dogodke $A_n$ in $B_n$: to sta dogodka, da v $n$-tem poskusu pride do opažanja $A$ oziroma $B$. Verjetnost na tem prostoru označimo s $\tilde{P}$ (to je torej produkt števno neskončno verjetnostnih mer $P$). Zanima nas $\tilde{P}(C_0)$, kjer je $C_0$ dogodek, da pri prvem poskusu, pri katerem pride do opažanja $B$, pride tudi do opažanja $A$. Dokazali bomo dokaj intuitivno trditev:

$$\tilde{P}(C_0) = P(A \mid B)\,. \qquad (*)$$

To lahko storimo na vsaj dva načina.

*Prvi način*: dogodek $C_0$ zapišemo kot disjunktno unijo dogodkov $\bar{B}_1 \cap \cdots \cap \bar{B}_{n-1} \cap A_n \cap B_n$, kjer je $n = 1, 2, 3, \ldots$. Sledi:

$$\tilde{P}(C_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{P}(\bar{B}_1 \cap \cdots \cap \bar{B}_{n-1} \cap A_n \cap B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - P(B))^{n-1}\, P(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A \mid B)\,.$$

*Drugi način*: s pomočjo rekurzivne zveze. Dogodek $C_0$ zapišemo kot disjunktno unijo dogodkov $A_1 \cap B_1$ in $\bar{B}_1 \cap C_0^{\rightarrow}$, kjer je $C_0^{\rightarrow}$ dogodek, da pri prvem poskusu *od drugega naprej*, pri katerem pride do opažanja $B$, pride tudi do opažanja $A$. Tedaj velja $\tilde{P}(C_0^{\rightarrow} \mid \bar{B}_1) = P(C_0)$ (intuitivno je to zelo jasno, teoretična utemeljitev pa sloni na t. i. *Dynkinovi lemi*, znani tudi kot *izrek* $\pi$–$\lambda$). sledi:

$$\tilde{P}(C_0) = \tilde{P}(A_1 \cap B_1) + \tilde{P}(\bar{B}_1)\tilde{P}(C_0) = P(A \cap B) + (1 - P(B))\tilde{P}(C_0)\,,$$

od koder dobimo:

$$\tilde{P}(C_0) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A \mid B)\,.$$

b) Slučajna spremenljivka $R$ lahko zavzame vrednosti 1, 2 ali 3. Dogodke, povezane z njenimi vrednostmi, lahko prikažemo z naslednjimi vzorci rekordov s pripadajočimi verjetnostmi:

$$\begin{array}{lll}
R = 1: & 7, \ldots 10, \ldots & \frac{1}{6} \\
R = 2: & 7, \ldots 8, \ldots 10, \ldots & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\
 & 7, \ldots 9, \ldots 10, \ldots & \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \\
R = 3: & 7, \ldots 8, \ldots 9, \ldots 10, \ldots & \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}
\end{array}$$

(dogodek $\{R = 1\}$ je natanko dogodek iz prejšnje točke). Torej je:

$$R \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

c) Iskana verjetnost je kvocient verjetnosti vzorca $7, 8, \ldots 10, \ldots$ in verjetnosti dogodka, da je $R = 2$, torej je enaka:

$$\frac{\frac{1}{22} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{33}\,.$$

**2.** *Prvi način.* Za $x > 0$ velja:

$$f_{U|X}(u \mid x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; x \le u \le 2x \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Od tod se vidi, da je $U$ skoncentrirana na intervalu $(0, \infty)$, saj so tam skoncentrirane vse pogojne gostote. Za $u > 0$ velja:

$$f_U(u) = \int_0^\infty f_{U|X}(u \mid x) f_X(x) \, \mathrm{d}x = \int_{u/2}^u \frac{1}{x} \cdot x \, e^{-x} \, \mathrm{d}x = e^{-u/2} - e^{-u} .$$

Torej je:

$$f_U(u) = \begin{cases} e^{-u/2} - e^{-u} & ; u > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Matematično upanje lahko izračunamo bodisi kot:

$$E(U) = \int_{-\infty}^\infty u f_U(u) \, \mathrm{d}u = \int_0^\infty u \big( e^{-u/2} - e^{-u} \big) \, \mathrm{d}u = 3$$

bodisi iz matematičnega upanja enakomerne porazdelitve:

$$E(U \mid X) = \frac{3X}{2} , \qquad E(U) = \frac{3}{2} \, E(X) = 3 .$$

*Drugi način.* Opazimo, da je slučajna spremenljivka $V := U/X$ pogojno na $X$ porazdeljena enakomerno na intervalu $(1, 2)$, neodvisno od $X$. Torej je $V$ neodvisna od $X$. Iščemo porazdelitev produkta $U = VX$. Za $u > 0$ velja:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^\infty f_X(x) f_V\left(\frac{u}{x}\right) \left|\frac{1}{x}\right| \mathrm{d}x = \int_{u/2}^u x \, e^{-x} \, \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = e^{-u/2} - e^{-u}$$

ali tudi:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^\infty f_V(v) f_X\left(\frac{u}{v}\right) \left|\frac{1}{v}\right| \mathrm{d}v = \int_1^2 \frac{u}{v^2} \, e^{-u/v} \, \mathrm{d}v = u \int_{1/2}^1 e^{-tu} \, \mathrm{d}t = e^{-u/2} - e^{-u} .$$

Matematično upanje je seveda enako:

$$E(U) = E(X) \, E(V) = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3 .$$

**3.** Iz zapisa gostote:

$$f(x) = a \, e^{(a-1) \ln x}$$

(za $0 < x < 1$) razberemo, da gre za eksponentno družino, katere parametrični prostor je odprta množica $(0, \infty)$ (za vse $a$ iz te množice ima porazdelitev smisel). Nepristranska cenilka z najmanjšo možno disperzijo bo torej vsaka funkcija pripadajoče zadostne statistike $\ln X$, ki bo nepristranska cenilka za $a^2$. Ker je funkcija $x \mapsto \ln x$ strogo naraščajoča, je dovolj iskati kar funkcije opažanja $X$. Iz:

$$E(X^2) = a \int_0^1 x^{a+1} \, \mathrm{d}x = \frac{a}{a+2} = 1 - \frac{2}{a+2}$$

sledi, da je iskana cenilka $(1 - X^2)/2$.

**4.** Ker ima spremenljivka $X$ disperzijo $1/12$ *ne glede na $a$* in ker je vzorec velik, se lahko naslonimo na konstrukcijo intervala zaupanja za matematično upanje normalne porazdelitve z znano disperzijo:

$$\bar{X} - \frac{c\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}\,,$$

kjer je $\mu$ matematično upanje, $c$ pa je kvantil standardne normalne porazdelitve za verjetnost $(1 + \beta)/2 = 0\text{˙}975$, torej $c = z_{0.975} \doteq 1\text{˙}96$. Parameter $\sigma$ je standardni odklon, ki je, kot smo že omenili, enak $1/\sqrt{12}$, matematično upanje $\mu$ pa je enako $a + \frac{1}{2}$. Iskani asimptotični interval zaupanja je torej:

$$\bar{X} - \frac{1}{2} - \frac{z_{0.975}}{\sqrt{12n}} < a < \bar{X} - \frac{1}{2} + \frac{z_{0.975}}{\sqrt{12n}}$$

oziroma približno:

$$\bar{X} - 0\text{˙}5 - \frac{0\text{˙}57}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} - 0\text{˙}5 + \frac{0\text{˙}57}{\sqrt{n}}\,.$$