Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 23. 11. 2009

Matematika – UNI-BOL

1. Označimo z A dogodek, da Goran in Hedvika prekrižata same različne številke. Naloga se da rešiti na vsaj dva načina.

Prvi način. Za $i = 0, 1, 2, 3$ označimo s H_i dogodek, da Goran prekriža natanko i številk izmed 19, 20 in 21. Tedaj velja:

$$P(H_i) = \frac{\binom{3}{i}\binom{18}{7-i}}{\binom{21}{7}}, \qquad P(A \mid H_i) = \frac{\binom{21-i}{7}}{\binom{21}{7}}$$

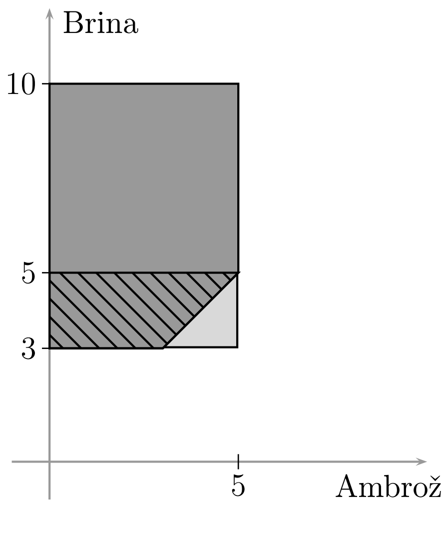
in iz izreka o polni verjetnosti dobimo:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{3} P(H_i)\, P(A \mid H_i) = \frac{\binom{18}{7}\binom{21}{7} + 3 \cdot \binom{18}{6}\binom{20}{7} + 3 \cdot \binom{18}{5}\binom{19}{7} + \binom{18}{4}\binom{18}{7}}{\binom{21}{7}^2} =$$
$$= \frac{37687}{54150} \doteq 0{\dot{}}696\,.$$

Drugi način. Če z B_i označimo dogodek, da sta Goran in Hedvika oba prekrižala številko i, velja $A = (B_{19} \cup B_{20} \cup B_{21})^{\mathrm{c}}$. Po načelu vključitev in izključitev dobimo:

$$\begin{aligned}
P(A) = 1 &- P(B_{19}) - P(B_{20}) - P(B_{21}) + \\
&+ P(B_{19} \cap B_{20}) + P(B_{19} \cap B_{21}) + P(B_{20} \cap B_{21}) - \\
&- P(B_{19} \cap B_{20} \cap B_{21}) = \\
&= 1 - 3 \cdot \left(\frac{7}{21}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{7 \cdot 6}{21 \cdot 20}\right)^2 - \left(\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{21 \cdot 20 \cdot 19}\right)^2 = \\
&= \frac{37687}{54150} \doteq 0{\dot{}}696\,.
\end{aligned}$$

2. Iz skice:



in razmerja ploščin dobimo, da je verjetnost enaka $8/33 \doteq 0{\text{˙}}242$.

3. Označimo s p verjetnost, da je posamezen izdelek brezhiben. Iz Laplaceove integralske formule dobimo, da p zadošča zahtevi naloge približno takrat, ko velja:

$$\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{349{\text{˙}}5 - 400p}{\sqrt{400p(1-p)}}\right) \geq 0{\text{˙}}95\,,$$

kar je približno (v okviru zaokrožitvenih napak) ekvivalentno:

$$\frac{400p - 349{\text{˙}}5}{\sqrt{400p(1-p)}} \geq 1{\text{˙}}645\,.$$

Po množenju in kvadriranju dobimo, da je to nadalje ekvivalentno $p \geq \dfrac{349{\text{˙}}5}{400} = 0{\text{˙}}87375$ in še:

$$(400^2 + 400 \cdot 1{\text{˙}}645^2)p^2 - 400(2 \cdot 349{\text{˙}}5 + 1{\text{˙}}645^2)p + 349{\text{˙}}5^2 \geq 0\,.$$

Kvadratna neenačba je ekvivalentna pogoju $p \leq p_1$ ali $p \geq p_2$, kjer je:

$$p_1 = \frac{400(2 \cdot 349{\text{˙}}5 + 1{\text{˙}}645^2) - \sqrt{4 \cdot 400 \cdot 349{\text{˙}}5 \cdot 1{\text{˙}}645^2(400 - 349{\text{˙}}5) + 400^2 \cdot 1{\text{˙}}645^4}}{2(400^2 + 400 \cdot 1{\text{˙}}645^2)} \doteq$$
$$\doteq 0{\text{˙}}844 \quad \text{(zaokroženo navzdol)}$$
$$p_2 = \frac{400(2 \cdot 349{\text{˙}}5 + 1{\text{˙}}645^2) + \sqrt{4 \cdot 400 \cdot 349{\text{˙}}5 \cdot 1{\text{˙}}645^2(400 - 349{\text{˙}}5) + 400^2 \cdot 1{\text{˙}}645^4}}{2(400^2 + 400 \cdot 1{\text{˙}}645^2)} \doteq$$
$$\doteq 0{\text{˙}}899 \quad \text{(zaokroženo navzgor)}\,.$$

Približno zadosten pogoj bo torej $p \geq 0{\text{˙}}899$.

V resnici je pogoj $p \geq 0{\text{˙}}899058$ zadosten, medtem ko $p = 0{\text{˙}}899057$ še ne zadošča zahtevi naloge.

4. Kumulativna porazdelitvena funkcija:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ;\ x \leq -1 \\ 1 - \dfrac{\arccos x}{\pi} & ;\ -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & ;\ x \geq 1 \end{cases}$$

Porazdelitvena gostota:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & ;\ -1 < x < 1 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}$$