Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 17. 11. 2011

Matematika – univerzitetni študij

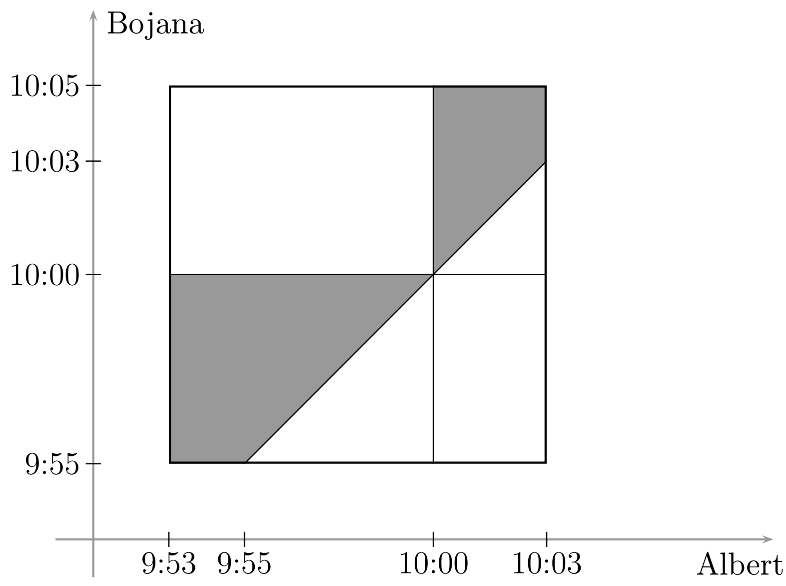
1. a) Igralca najprej dobivala igre izmenoma, brž ko nekdo dvakrat zmaga, pa končata. Če z J_2 označimo dogodek, da je zadnji dve rundi dobil Janez, velja:

$$P(J_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right)^k + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right)^k \right] \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{16}{21} \doteq 0\text{˙}762\,.$$

b) Naj bo A dogodek, da sta odigrala več kot tri runde. Izračunamo lahko:

$$P(A \mid J_2) = 1 - P(A^c \mid J_2) = 1 - \frac{1}{P(J_2)} \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] = \frac{2}{9} \doteq 0\text{˙}222\,.$$

2. Če postavimo, da je izid v verjetnostnem prostoru določen z Albertovim in Bojaninim prihodom na postajo, je tak izid izbran na slepo v okviru predpisanih meja za prihode (okvir na sliki). S sivo barvo je označen dogodek, da se Albert in Bojana srečata:



Verjetnost iskanega dogodka je razmerje ploščin, ki je enako 0˙33.

3. Označimo z n število metov, z S pa število šestic. Tedaj je $S \sim \mathrm{b}(n, 1/6)$. Veljati mora:

$$P(S \geq 0{\cdot}15\,n) \geq 0{\cdot}95\,.$$

Po Laplaceovi integralski formuli je:

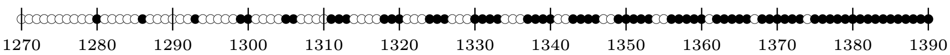
$$P(S \geq 0{\cdot}15\,n) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{0{\cdot}15\,n - n/6}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\sqrt{\frac{n}{500}}\right).$$

Torej bo število metov ustrezalo približno tedaj, ko bo $\sqrt{n/500} \geq \Phi^{-1}(0{\cdot}45)$ oziroma $n \geq 500\big(\Phi^{-1}(0{\cdot}45)\big)^2 \doteq 1352{\cdot}77$, torej $n \geq 1353$.

V resnici je najmanjše možno število metov, ki ustrezajo zahtevi, že 1280. Ne ustreza pa *vsako* število izdelkov, ki je večje ali enako 1280: prvo število, od katerega naprej vsako število naročenih ustreza, je 1375. Nekaj točnih verjetnosti:

$$\begin{aligned}
n = 1280: &\quad P(S \geq 192) \doteq 0{\cdot}9507721 \\
n = 1281: &\quad P(S \geq 193) \doteq 0{\cdot}9437958 \\
n = 1374: &\quad P(S \geq 207) \doteq 0{\cdot}9497926 \\
n = 1375: &\quad P(S \geq 207) \doteq 0{\cdot}9510002
\end{aligned}$$

Na naslednji sliki so prikazana števila naročenih izdelkov, ki ustrezajo (polni krogci) in števila, ki ne ustrezajo (prazni krogci).



4. Označimo s H_j dogodek, da se študent ni učil j vprašanj, ki jih je dobil ($j = 0, 1, 2$). Tedaj velja:

$$P(H_j) = \frac{\binom{5}{j}\binom{5}{2-j}}{\binom{10}{2}}, \qquad P(U = i \mid H_j) = \binom{j}{i} \cdot 0{\cdot}2^i \cdot 0{\cdot}8^{j-i}$$

oziroma:

$$\begin{aligned}
&P(H_0) = \frac{10}{45}, && P(U = 0 \mid H_0) = 1\,, && P(U = 1 \mid H_0) = 0\,, && P(U = 2 \mid H_0) = 0\,, \\
&P(H_1) = \frac{25}{45}, && P(U = 0 \mid H_1) = 0{\cdot}8\,, && P(U = 1 \mid H_1) = 0{\cdot}2\,, && P(U = 2 \mid H_1) = 0 \\
&P(H_2) = \frac{10}{45}, && P(U = 0 \mid H_2) = 0{\cdot}64\,, && P(U = 1 \mid H_2) = 0{\cdot}32\,, && P(U = 2 \mid H_2) = 0{\cdot}04\,.
\end{aligned}$$

Torej je:

$$
\begin{aligned}
P(U=0) &= \frac{10}{45}\cdot 1 + \frac{25}{45}\cdot 0\text{˙}8 + \frac{10}{45}\cdot 0\text{˙}64 \doteq 0\text{˙}8089\,,\\
P(U=1) &= \frac{10}{45}\cdot 0 + \frac{25}{45}\cdot 0\text{˙}2 + \frac{10}{45}\cdot 0\text{˙}32 \doteq 0\text{˙}1822\,,\\
P(U=2) &= \frac{10}{45}\cdot 0 + \frac{25}{45}\cdot 0 + \frac{10}{45}\cdot 0\text{˙}04 \doteq 0\text{˙}0089\,,
\end{aligned}
$$

oziroma približno:

$$
U \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0\text{˙}8089 & 0\text{˙}1822 & 0\text{˙}0089 \end{pmatrix}\,.
$$

Opomba: seveda bi bilo dovolj izračunati $P(U=1)$ in $P(U=2)$ in nato upoštevati, da je vsota verjetnosti enaka 1.